((إيجاد معكوس مصفوفة مربعة باستخدام طريقة المرافقة الثنائية))

المرافقة الثنائية للمصفوفة المربعة A :- هي المبدلة لمصفوفة مرافقات عناصر A ورمزها adj A اي اذا كانت ((aij)) =A من درجة n فأن adj A= ((∝ ji ∝ ij))))=((

حيث ∝ij مرافقة العنصر aij .

لتكن $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

فان $adj\ A = \begin{pmatrix} \propto_{11} & \propto_{21} \\ \propto_{12} & \propto_{22} \end{pmatrix}$

حيث:

$\propto_{11}=(-1)^{1+1}\ (a_{22})=a_{22}$

$\propto_{22}=(-1)^{2+2}(a_{11})=a_{11}$

$\propto_{12}=(-1)^{1+2}(a_{21})=-a_{21}$

$\propto_{21}=(-1)^{2+1}(\propto_{12})=-a_{12}$

$\therefore \text{adj A}= \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$

ويكون معكوس المصفوفة هو $\boldsymbol{A^{-1} = \frac{1}{|A|}\ adj\ A}$

حيث $\boldsymbol{|A| \neq 0}$

مثال١//

فالمرافقة الثنائية لـ $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ هي $\text{Adj A}=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$|A|=4-3=1 \quad \rightarrow \therefore A^{-1} = \frac{1}{|A|}\ adj = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

مثال ٢// أوجد A^{-1} اذا كانت

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & 5 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

لنفرض ان مبدلة مصفوفة مرافقات عناصر A هي $B=\begin{pmatrix}\propto_{11} & \propto_{12} & \propto_{13}\\ \propto_{21} & \propto_{22} & \propto_{23}\\ \propto_{31} & \propto_{32} & \propto_{33}\end{pmatrix}$

الحل/

اولاً: نجد عناصر مصفوفة المرافقات $\propto_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}4 & 5\\ -1 & 3\end{vmatrix}=17$

$\propto_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}0 & 5\\ -2 & 3\end{vmatrix}=-10$

$\propto_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}0 & 4\\ -2 & -1\end{vmatrix}=8$

$\propto_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2 & -3\\ -1 & 3\end{vmatrix}=-3$

$\propto_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & -3\\ -2 & 3\end{vmatrix}=-3$

$\propto_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ -2 & -1\end{vmatrix}=-3$

$\propto_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}2 & -3\\ 4 & 5\end{vmatrix}=22$

$\propto_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & -3\\ 0 & 5\end{vmatrix}=-5$

$\propto_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 4\end{vmatrix}=4$

$\therefore \mathbf{B}=\begin{pmatrix}17 & -10 & 8\\ -3 & -3 & -3\\ 22 & -5 & 4\end{pmatrix}$

ثانياً: نجد مبدلة مصفوفة المرافقات B وتمثل adj A

أي ان $B^{T}=\ adj\ A=\begin{pmatrix}17 & -3 & 22\\ -10 & -3 & -5\\ 8 & -3 & 4\end{pmatrix}$

والمعكوسة لـ A هي: $A^{-1}\ =\ \frac{1}{|A|}\ \ adj\ A$

حيث $|A|\ =\ -27$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{-27} \begin{pmatrix} 17 & -3 & 22 \\ -10 & -3 & -5 \\ 8 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

تمرين / اوجد معكوس المصفوفة الاتية :

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 6 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$