مقاييس التشتت Measures of Dispersion

يستعمل علماء الإحصاء عدة مقاييس لتحديد درجة انحراف البيانات عن القيمة الوسطية ويطلقون عليها اسم مقاييس التشتت وهي مقاييس عددية تهتم بقياس تشتت البيانات ، والذي هو مقدار تباعد البيانات فيما بينها فتشتت البيانات يكون صغيراً إذا كانت البيانات متقاربة فيما بينها والعكس بالعكس ومقاييس التشتت هي قسم من أقسام الإحصاء الوصفي وتستخدم لمقارنة مجموعات البيانات المختلفة إذ أن مقاييس النزعة المركزية لا تكفي وحدها لوصف مجموعة البيانات.

وتنقسم مقاييس التشتت إلى قسمين مقاييس التشتت المطلق و مقاييس التشتت النسبي ومن مقاييس التشتت المطلق:

أولاً : الانحراف المتوسط $M. D.$ *The Mean Deviation*

يعرف الانحراف المتوسط على انه متوسط مجموع الانحرافات المطلقة عن الوسط الحسابي وسنوضح كيفية حساب الانحراف المتوسط للبيانات المفردة (الغير ميوبة) والبيانات الميوبة .

١. الانحراف المتوسط للبيانات الغير ميوبة :

إذا كان لدينا n من القيم $x_1, x_2, \dots, x_n$ فإن

$$M. D. = \frac{\sum |d|}{n} \quad : \quad d = x_i - \bar{x}$$

مثال (١) : جد الانحراف المتوسط للقيم 9, 8, 6, 5, 7 .

الحل : في البداية نجد الوسط الحسابي للقيم

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{35}{5} = 7$$

والآن نكون الجدول

x_i	5	6	7	8	9	$\sum x_i = 35$
d	-2	-1	0	1	2	
$ d $	2	1	0	1	2	$\sum d = 6$

$$M. D. = \frac{\sum |d|}{n} = \frac{6}{5} = 1.2$$

٢. الانحراف المتوسط للبيانات المبوبة هو :

$$M.D. = \frac{\sum f_i |d|}{\sum f_i}$$

مثال (٢) : أوجد الانحراف المتوسط من جدول التوزيع التكراري

الفئات	60-62	63-65	66-68	69-71	72-74
التكرارات	8	21	40	25	6

الحل : نكون الجدول الآتي :

الفئات	f_i	x_i	$f_i x_i$	$ d = x_i - \bar{x} $	$f_i d $
60-62	8	61	$8 \times 61 = 488$	$ 61 - 67 = 6$	$8 \times 6 = 48$
63-65	21	64	21×64	$ 64 - 67 = 3$	$21 \times 3 = 63$
66-68	40	67	40×67	$ 67 - 67 = 0$	$40 \times 0 = 0$
69-71	25	70	25×70	$ 67 - 70 = 3$	$25 \times 3 = 75$
72-74	6	73	$6 \times 73 = 438$	$ 67 - 73 = 6$	$6 \times 6 = 36$
مج	$\sum f_i = 100$		$\sum f_i x_i = 6700$		$\sum f_i d = 222$

اولا نحسب الوسط الحسابي

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{6700}{100} = 67$$

ثم نحسب الانحراف المتوسط

$$M.D. = \frac{\sum f_i |d|}{\sum f_i} = \frac{222}{100} = 2.22$$

ثانياً : التباين S^2 Variance

يعرّف التباين متوسط مربع انحرافات القيم عن وسطها الحسابي و سنوضح كيفية حساب التباين للبيانات المفردة (الغير مبوبة) والبيانات المبوبة .

١. التباين للبيانات الغير مبوبة

إذا كان لدينا n من القيم $x_1, x_2, \dots, x_n$ فان

$$S^2 = \frac{\sum d^2}{n - 1}$$

مثال (٣) : جد التباين للقيم 19, 18, 16, 15, 17 .

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{85}{5} = 17$$

الحل : في البداية نجد الوسط الحسابي للقيم

والآن نكون الجدول

x_i	15	16	17	18	19	$\sum x_i = 85$
d	-2	-1	0	1	2	
d^2	4	1	0	1	4	$\sum d^2 = 10$

$$S^2 = \frac{\sum d^2}{n - 1} = \frac{10}{5 - 1} = 2.5$$

٢. التباين للبيانات المبوبة :

$$S^2 = \frac{\sum f_i d^2}{\sum f_i - 1}$$

مثال (٤) : جد التباين من جدول التوزيع التكراري

35-39	30-34	25-29	20-24	15-19	10-14	الفئات
15	17	28	21	11	8	التكرارات

الحل : نكون الجدول الآتي :

الفئات	f_i	x_i	$f_i x_i$	$ d $	d^2	$f_i d^2$
10-14	8	12	96	$ 12 - 26 = 14$	196	$8 \times 196 = 1568$
15-19	11	17	187	$ 17 - 26 = 9$	81	$11 \times 81 = 891$
20-24	21	22	462	$ 22 - 26 = 4$	16	$21 \times 16 = 336$
25-29	28	27	756	$ 27 - 26 = 1$	1	$28 \times 1 = 28$
30-34	17	32	544	$ 32 - 26 = 6$	36	$17 \times 36 = 612$
35-39	15	37	555	$ 37 - 26 = 11$	121	$15 \times 121 = 1815$
مج	100		2600			$\sum f_i d^2 = 5250$

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{2600}{100} = 26$$

$$S^2 = \frac{\sum f_i d^2}{\sum f_i - 1} = \frac{5250}{99} = 53.03$$

ثالثاً: الانحراف المعياري S Standard Deviation

وهو من ادق مقاييس التشتت وأكثرها استعمالاً ويعرف بأنه الجذر التربيعي للتباين .

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n - 1}}$$

الانحراف المعياري للبيانات الغير مبوبة

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{\frac{\sum f_i d^2}{\sum f_i - 1}}$$

الانحراف المعياري للبيانات المبوبة

مثال (٥) القيم التالية تعطي تراكيز الأجسام المضادة في مصل الدم البشري لعينة من ثمانية اشخاص
2.05 , 0.99 , 1.09 , 1.34 , 1.45 , 2.04 , 1.13 , 2.15 احسب الانحراف المعياري لهذه القيم .

الحل :

نجد الوسط الحسابي للقيم

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{12.24}{8} = 1.53$$

x_i	d	d^2
2.15	0.62	0.3844
1.13	- 0.40	0.1600
2.04	0.51	0.2601
1.45	-0.08	0.0064
1.34	-0.19	0.0361
1.09	- 0.44	0.1936
0.99	- 0.54	0.2916
2.05	0.52	0.2704
$\sum x_i = 12.24$	$\sum d = 0$	$\sum d^2 = 1.3322$

$$S = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{1.3322}{7}} = 0.4363$$

مثال (٦) احسب الانحراف المعياري لمستوى الهيموغلوبين في الدم لعينة مكونة من خمسين شخصا تم تلخيص مستوى الهيموغلوبين في الدم لهم في الجدول التالي :

17.2-18.2	16.1-17.1	15-16	13.9-14.9	12.8-13.8	مستوى الهيموغلوبين في الدم
11	16	15	5	3	التكرارات

الحل :

الفئات	x_i	f_i	$f_i x_i$	$f_i d^2$
12.8-13.8	13.3	3	39.9	23.52
13.9-14.9	14.4	5	72	14.45
15-16	15.5	15	232.5	5.4
16.1-17.1	16.6	16	265.6	4
17.2-18.2	17.7	11	194.7	28.16
المجموع		50	804.7	75.53

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{804.7}{50} = 16.1$$

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{\sum f_i d^2}{\sum f_i - 1}} = \frac{75.53}{49} = 1.54$$

اهم خصائص التباين والانحراف المعياري :

يخضع كل من التباين والانحراف المعياري لبعض العمليات الجبرية يمكن تلخيصها بالجدول التالي

البيانات	التباين	الانحراف المعياري
$x_1, x_2, \dots, x_n$	S^2	S
$x_1 \mp c, x_2 \mp c, \dots, x_n \mp c$	S^2	S
$kx_1, kx_2, \dots, kx_n$	$k^2 S^2$	$ k S$
$kx_1 \mp c, kx_2 \mp c, \dots, kx_n \mp c$	$k^2 S^2$	$ k S$

مثال (٧) اذا علمت ان $S_x^2 = 40$, $\bar{x} = 100$, $y = 2x + 5$ فجد الوسط الحسابي و التباين والانحراف القياسي لـ y .

الحل :

$$\bar{y} = 2\bar{x} + 5 = 2 \times 100 + 5 = 205$$

$$S_y^2 = k^2 S_x^2 = 2^2 \times 40 = 160$$

$$S_y = k S_x = 2 \times \sqrt{40} = 4\sqrt{10}$$

س/ واجب

اكمل الخلايا الفارغة في الجدول التالي :

البيانات	الوسط الحسابي	التباين	الانحراف المعياري
9, 8, 6, 5, 7			
29, 28, 26, 25, 27			
-1, -2, -4, -5, -3			
27, 24, 18, 15, 21			
28, 62, 22, 20, 24			
128, 162, 122, 120, 124			

أما القسم الثاني من مقاييس التشتت فهو مقاييس التشتت النسبي ومن أهمها :

معامل الاختلاف $C.V$ Coefficient Variation

وهو معامل نسبي يستعمل لمقارنة تشتت ظاهرتين أو أكثر ويحسب من العلاقة التالية :

$$C.V = \frac{S}{\bar{x}} \times 100\%$$

مثال (١٠): فيما يلي درجات أحد الطلاب في مادتي الرياضيات واللاعضوية جد معامل الاختلاف لدرجات الطالب في المادتين ويبيّن في أي من المادتين كان تشتت الدرجات أكبر .

72	45	67	56	الرياضيات x_i
70	89	34	47	اللاعضوية y_i

الحل :

$$\bar{x} = \frac{240}{4} = 60 \quad \text{و} \quad \bar{y} = \frac{240}{4} = 60$$

x_i	72	45	67	56	$\sum x_i = 240$
$(x_i - \bar{x})^2$	144	225	49	16	$\sum (x_i - \bar{x})^2 = 434$
y_i	70	89	34	47	$\sum y_i = 240$
$(y_i - \bar{y})^2$	100	841	676	169	$\sum (y_i - \bar{y})^2 = 1786$

$$S_x^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n - 1} = \frac{434}{3} = 144.667$$

$$S_y^2 = \frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{n - 1} = \frac{1786}{3} = 595.333$$

$$\therefore S_x = 12.028$$

$$S_y = 24.4$$

$$C.V._x = \frac{S_x}{\bar{x}} \times 100 = \frac{12.028}{60} \times 100\% = 20.05\%$$

$$C.V._y = \frac{S_y}{\bar{y}} \times 100 = \frac{24.4}{60} \times 100\% = 40.67\%$$

وعليه فان التشتت في درجات مادة اللاعضوية اكثر

تمارين

١. جد (١) الانحراف المتوسط (٢) التباين (٣) الانحراف القياسي (٤) معامل الاختلاف .

للقيم 4, 10, 2, 8, 4, 14, 10, 12, 8

٢. من جدول البيانات التالي :

الفئات	16-21	22-27	28-33	34-39	40-45
التكرارات	15	16	25	20	10

احسب :

(١) الانحراف المتوسط (٢) التباين (٣) الانحراف القياسي (٤) معامل الاختلاف .

٣. ارسم الجدول التالي ثم ضع قيمة الكمية المفقودة في مكانها المخصص :

$\bar{x}$	S^2	S	C.V.
50	900		
		10	20%
25			5%

٤. قارن بين تشتت درجات مادة الرياضيات للامتحان الشهري الاول بالنسبة لطلاب وطالبات المرحلة الثانية من قسم الكيمياء للعام الدراسي 2014-2015 والمبينة في الجدول التالي :

الفئات	1-10	11-20	21-30	31-40	41-50	51-60	61-70	71-80	81-90	91-100
عدد الطلاب	6	4	8	5	5	10	8	2	3	1
عدد الطالبات	0	5	6	9	12	10	5	3	2	4

٥. اخذت عينة من ستة اطفال حديثي الولادة وكانت اوزانهم بالكيلو غرام كالآتي :

2.8, 3.2, 4.5, 3.5, 6.2, 3.8 احسب معامل الاختلاف لأوزان الاطفال .

٦. اذا علمت ان $S_x^2 = 25$, $\bar{x} = 100$, $y = 2x - 10$ فجد معامل الاختلاف لـ y .

٧. نشرت احدى وكالات الانباء أنّ قتلى عصابات داعش الاجرامية في شهر حزيران من عام 2015 على ايدي مقاتلينا الشجعان من الحشد الشعبي المقدس والجيش والشرطة الاتحادية وطيران الجيش كان 1269 في صلاح الدين و 564 في الانبار و 431 في نينوى و 305 في ديالى وفي بغداد 209 وفي بابل 197 وفي كركوك 39 احسب معامل الاختلاف لمن تم ترحيلهم الى جهنم وبئس المصير .