جامعة بابل

كلية التربية للعلوم الصرفة

قسم الفيزياء

محاضرات في الميكانيك الاحصائي

المرحلة الثالثة (الفصل الدراسي الثاني)

اعداد

الأستاذ علي عبيس محسن

الميكانـــــيك الاحصـــــــــــــــائي

المقدمة

يمكن وصف حركة الاجرام التي نلاحظها حولنا بنجاح، باستخدام قوانين نيوتن في الميكانيك الكلاسيكي مثل قوانين الزخم والطاقة والقوة على اعتبار ان هذه الاجرام محددة الابعاد في الفضاء ويمكن ملاحظتها. فنحن نعلم ان قوانين نيوتن لاقت استحسانا وقبولا منقطع النظير عندما توقعت السلوك العيني لأنظمة الميكانيك الحرارية. ولكن عندما تم تطبيقها على الاجسام المجهرية وجد انها تعطي إجابات غريبة وغير منطقية للظواهر العملية المحسوبة. فعلى سبيل المثال لم تستطيع قوانين نيوتن الإجابة على السؤال لماذا تؤول الحرارة النوعية الى الصفر عندما تؤول درجة الحرارة الى الصفر هذا قصور في الميكانيك الكلاسيكي ولم يحل الا بافتراض بلانك وهو ان طاقة الجسيمات يجب ان تكون مكممه وتبعا لهذا الفرض ظهرت اساسيات الميكانيك الكم.

لماذا نلجئ الى الميكانيك الاحصائي؟ الجواب هو ان النظام المجهري يتكون من اعداد فلكيه من الجسيمات ولو طبقنا قوانين نيوتن على كل جسيم في النظام فسوف نصل الى عدد لانهائي من المعادلات المطلوب حلها والتي تحتاج الى عقود كي يتم حلها بواسطة الكمبيوتر.

حتى لو استطعنا إيجاد حل لها بعد هذه الفترة فسوف نجد ان النظام قد تغير. لهذا سوف نلجئ الى القوانين الإحصائية حيث تمكننا من التعامل مع اعداد لانهائية من الجسيمات المميزة وغير المميزة.

قد بدأ استخدام الطرق الإحصائية قبل ظهور اساسيات الميكانيك الكم بأعوام وذلك نظرا لان النظريات الذرية أصبحت الحجر الأساس في مجالات عده مثل التفاعلات الكيميائية. ونظرا لصغر الذرات والجزيئات فقد اقترح العلماء عديدين مثل ماكسويل بولتزمان استخدام الطرق الإحصائية لنفهم العلاقة بين سلوك الذرات والطاقة. وبالرغم المعارضة الشديدة لهذا الاتجاه في بداية الامر ولكن لوحظ ان هذه الطريقة استطاعت ان تنتج وتتوقع الخواص الحرارية كما تتوقعها طرق الاستقرائية وهذا الاتجاه ما يسمى بالفيزياء الإحصائية او الإحصاء الديناميكي الحراري. لا تقتصر طرق التحليل الاحصائي على الجزيئات بل تشمل الذرات والالكترونات والفوتونات والفونونات وامواج المرونة في الجوامد ......الخ. سوف نطلق عليها اسم الجسيمات وتخضع هذه الجسيمات الى ثلاث أنواع من الاحصاءات بسبب تفاوت خواصها (إحصاء ماكسويل بولتزمان واحصاء إنشتاين واحصاء فرمي ديراك.

سوف نلاحظ هنا ان الهدف الأساس للإحصاء الديناميكي الحراري هو تقديم نظرية جسيمية من نتائجها نستطيع تغيير خواص الاتزان للنظام العيني، ولكن أساس هذه النظرية مبني على نظرية الميكانيك الكم. وان هذه النظرية يمكن تطويرها باستخدام مبادئ بسيطة لمستويات الطاقة وقوى التفاعل الداخلي بين الجزيئات.

والفكرة الرئيسية البحث عن دالة تعبر عن كثافة الاحتمال ليتم تطبيقها على تجمعات كبيره من الجسيمات المتطابقة. والفرض الرئيسي المبني علية الميكانيك الاحصائي هو (ان جميع المستويات المجهرية لمجموعة معزولة لها احتمالات متساوية). سوف نتناول في الفصل الأول بعض المفاهيم والمصطلحات الأساسية للميكانيك الاحصائي، وفي الفصل الثاني ندرس إحصاء ماكسويل وتطبيقاته وفي الفصل الثالث يتناول إحصاء بوز إنشتاين وتطبيقاته اما الفصل الرابع يهتم في دراسة إحصاء فيرمي ديراك.

الفصـــــــــــــــل الأول

الوصف الاحصائي لنظم من الجسيمات

1-وصف حالة النظام

نفرض أي نظام مكون من الجسيمات وهذه الجسيمات مهما كانت معقده مثل (مجاميع التفاعلات الضعيفة للمتذبذب التوافقي او الغاز او السائل وغيرها) ونحن نعلم بان هذه الأنظمة تتكون من الالكترونات والذرات والجزيئات يمكن وصفها بدلالة قوانين الميكانيك الكم مثلا، يمكن وصف النظام باستخدام الدالة الموجية

$$\psi(q_i \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots q_f)$$

التي هي دالة لمجموعة الاحداثيات (f) (بما في ذلك متغيرات البرم) المطلوبة لوصف النظام. (f) تمثل درجات الحرية للنظام. يتم تحديد الحالة الكمومية للنظام من خلال إعطاء قيم لمجموعة الاحداثيات الكمية(f) وبذلك الوصف الكمي يكتمل. وتكون الدالة الموجية ψمحددة في أي وقت.

مثال(1)/ نفترض نظام يتكون من جسيمة واحدة ثابته في موضعها وتمتلك برم ½ وزخم زاوي $\frac{1}{2}\ \hbar$ الوصف الكمي لها بواسطة الزمن والعدد الكمي m يأخذ قيمتين (1/2-او1/2)على الموضع الثابت للجسيمة اما اسفل او اعلى المحور Z (محور الجسيمة).

مثال (2)/نعتبر نظام يتكون من N من الجسيمات ثابتة في الموضع M وكل منها يمتلك برم ½ هنا N عدد كبير يمكن ان نمثلة بعدد افكادروا والعدد الكمي m لكل جسيمة يأخذ قيمتين (1/2-او1/2)و بذلك الحالة الكاملة للنظام يتم تحديدها بواسطة العدد الكمي N

$$m_i \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots m_N$$

الذي يمثل اتجاه دوران الجسم .

مثال(3)/ نعتبر نظام يتكون من بعد واحد للمهتز التوافقي البسيط في الموضع الموجب منX الحالة المسموح بها لهذا المتذبذب توصف بدلالة العدد الكمي n وان الطاقة تعطى بالعلاقة التالية

$$E_n = (n + \frac{1}{2}\ \hbar\omega)$$

ω تمثل التردد الزاوي للمتذبذب والعدد الكمي n يأخذ القيم 0,1,2,

مثال (4) / نظام يتألف من N من التفاعلات الضعيفة في بعد واحد للمتذبذب التوافقي البسيط الحالة الكمية للنظام توصف بواسطة العدد الكمي

$$n_i \dots \dots \dots \dots \dots n_N$$

والعدد الكمي n_i يشير للمتذبذب التوافقي والذي يأخذ القيم 0,1,2,

مثال(5)/ نظام يتكون من جسيمة واحده (بدون برم) داخل صندوق مستطيل لوصف هذ الجسيمة نبدأ من معادلة دبرولي

التي تربط طول موجة المجال الأحادي الموجي λ بالزخم p او طاقتها E حيث ان

$$\lambda = \frac{h}{p} \qquad , \qquad f = \frac{E}{h}$$

حيث f يمثل التردد ، h ثابت بلانك ، $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ وباستخدام العدد الموجي k حيث ان $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ والسرعة الزاوية

$\omega = 2\pi f$ نحصل على $p = \hbar k$ و $\mathcal{E} = \hbar\omega$

ويمكن وصف المجال المادي للجسيمة بالاتجاه السيني x بدالة الموجية $\psi_{(x)}$ *وهي تعتمد على طاقة الجسيمة الكلية*

$$\mathrm{E}_X = \frac{P_X^2}{2m} + E_P(x) \qquad (1)$$

حيث ان E_P تمثل الطاقة الكامنة السينية و$\frac{P_X^2}{2m}$ *الطاقة الحركية السينية و تربط هذه الطاقة مع الدالة الموجية معادلة شرويدنكر الشهيرة للأمواج المادية .*

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{dx}^2} + E_P\psi_{(X)} = E_{(X)}\psi_{(X)} \qquad (2)$$

هذه المعادلة في الميكانيك الكمي تعادل معادلة نيوتن $f = \frac{dp}{dt}$ في الميكانيك الكلاسيكي او معادلة ماكسويل في النظرية الكهرومغناطيسية ففي حالة الجسيمة الحرة الطاقة الكامنة صفر .

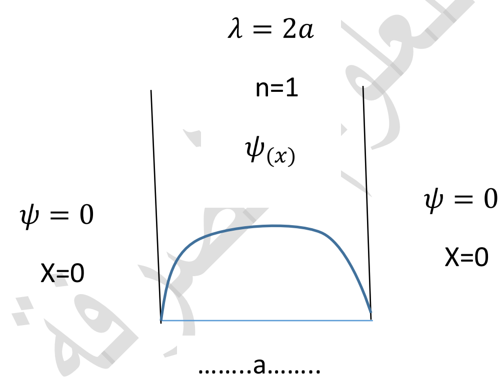
$$(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dx}^2} + k^2)\psi = 0 \qquad (3)$$

حيث ان $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$ هو العدد الكمي، يمكن حل المعادلة (3) باي من الدوال الموجية المألوفة.

$$\psi_{(X)} = Ae^{iKX}$$

$$\psi_{(X)} = Ae^{-iKX}$$

فلو اخذنا حالة جسيمة المحصورة في بئر جهد او جزيئة غاز في صندوق او الكترون محصور في قطعة معدنية داخل حاجز جهد يفوق الطاقة الحركية للإلكترون فان الالكترون يتحرك داخل المعدن ولكنه لا يتمكن من الهروب فلو فرضنا ان الدالة الموجية تتلاشى عند X=0 و x=a حيث a عرض الصندوق بالاتجاه السيني فان المعادلة (3) تحقق الدالة $\psi_{(x)} = \mathrm{c}\sin(kx)$ ، $k.a = n\pi$



لذلك فان $k = n.\frac{\pi}{a}$

$$p = \hbar k = \frac{n_1 \hbar \pi}{a}$$

وهذه المعادلة تمثل الزخم المكمم كذلك فان طاقة الجسيمة الحرة بالاتجاه السيني هي $\mathrm{E}_X = \frac{P_X^2}{2m} = \frac{n_1^2 \hbar^2 \pi^2}{2ma^2}$

أي ان الطاقة الحركية للجسيمة الحرة مكممه أيضا. فاذا كانت الجسيمة حرة الحركة في الاتجاهات (x,y,z) في الصندوق الذي أبعاده a,b,c فان الدالة الموجية للجسيمية تصبح.

$$\psi = c \sin\frac{n_1\pi x}{a}\sin\frac{n_2\pi y}{b}\sin\frac{n_3\pi z}{c} \qquad (4)$$

وهي تشبه الموجة المستقرة في تجويف مستطيل الشكل

$$p_{(x)} = \frac{n_1\hbar\pi}{a}, p_{(y)} = \frac{n_2\hbar\pi}{b}, p_{(z)} = \frac{n_3\hbar\pi}{c}$$

n_1,n_2,n_3 ارقام صحيحة موجبة ويصبح الزخم الكلي (p)

$$p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$$

وبذلك تصبح الطاقة الحركية للجسيمة

$$E = \frac{P^2}{2m} = \frac{\pi^2\hbar^2}{2m}\left(\frac{n_1^2}{a^2} + \frac{n_2^2}{b^2} + \frac{n_3^2}{c^2}\right)$$

فاذا كان الصندوق مكعب الشكل

$$E = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$$

وعلية من هذه المعادلة فان مستويات الطاقة تزدحم للجسيمات المحصورة في صندوق كبير لان (E تتناسب مع a^2) وتتباعد في الصندوق الصغير ملاحظة n تكون موجبة دائما.

2- المجموعة :

هي كمية من المادة عدد جسيماتها N يمكننا التعامل معها كوحدة لها خواصها المنظورة المميزة ويقارب عددها عدد افكادروا.

3-**التجمعات الإحصائية:** هو عدد ضخم لـn يؤول الى المالانهاية من مجموعات N_i وبذلك فان

$$i = \infty \qquad , \qquad N \to \infty = \sum N_i$$

4-**الاحتمالية :** احتمالية الحدث تعرف من النسبة بين ارقام حالة حدوث الحدث الى الرقم الكلي للحالات

الاحتمالية =ارقام حدوث الحدث/الرقم الكلي للحالات

فاذا رمينا قطعة نقود اما ان تأتي على وجه الصورة او على وجه الكتابة لذلك يكون الرقم الكلي للحالات هو2 بينما احتمالية ظهور وجه الصورة هو واحد فقط . اذن احتمالية ظهوره طبقا للقانون هو 1/2 وكذلك احتمالية ظهور الكتابة هو 1/2 أيضا .

وبذلك الاحتمالية الكلية هي $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$

5-الاحتمالية التي لا تعتمد على الاحداث

اذا كان حدثين او اكثر يمكن القول انه غير معتمده اذا كان ضهور احداهما لا يتأثر بظهور الاخر.

نفترض حدثين غير معتمدين يمكن ان يكونان في نفس الوقت او بالتعاقب. نفترض ان حدث واحد يمكن ان يحدث نرمز له n_1 بطريقة مختلفة وحدث اخر يحدث نرمز له n_2 أيضا بطريقة مختلفة والعدد الكلي لطرق حدوث الحدثين الذين يحدثان في نفس وقت او بالتعاقب

$$n = n_1.n_2$$

الان نرمز الرمز m_1 هو رقم الطريقة الملائمة للحدث الأول و m_2 هو الطريقة الملائمة للحدث الثاني وبذلك العدد الكلي للطرق الملائمة

$$m = m_1.m_2$$

الان احتمال ضهور الحدث الاول هو $p_1 = \frac{m_1}{n_1}$

واحتمالية حدوث الحدث الثاني هي $p_2 = \frac{m_2}{n_2}$

احتمالية ضهور الاحداث المركبة

$$\boxed{p = \frac{m}{n} = \frac{m_1}{n_1} \times \frac{m_2}{n_2}}$$

$$\boxed{p = p_1 \times p_2}$$

هذا يوضح احتمالية ضهور حدثين في نفس الوقت او بالتعاقب (الاحداث لمركبة) يساوي حاصل ضرب الاحتماليات الفردية للأحداث غير المعتمدة. هذه النتيجة يمكن ان تمتد الى k من الاحداث غير المعتمدة

$P_1, P_2, P_3, \ldots\ldots\ldots P_k$

ويمكن كتابة الاحتماليات الفردية على النحو التالي

$$p = p_1 \times p_2 \times \ldots\ldots\ldots\ldots p_k$$

مثال / درزن يحتوي على زوج واحد من الجواريب من كل الألوان التالية ازرق، بني، احمر، ابيض، اسود بدون النظر نختار زوج وبعد ذلك يغير هذا الزوج ونختار زوج اخر من الجواريب ماهي احتمالية اختيار الزوج الأحمر خلال الوقت .

الحل /

$$p(red) = 1/5$$

$$P(red\ and\ red) = 1/5 * 1/5 = 1/25$$

مثال/عند اجراء استبيان مدرسي وجد انه 9 طلاب من اصل 10 يحبون البيتزا .اذا ثلاث طلاب اختاروا بصوره عشوائية مع التبديل ماهي الاحتمالية لكل ثلاث طلاب يحبون البيتزا.

الحل/

$$p_1 = \frac{9}{10}$$

$$p_2 = \frac{9}{10}$$

$$p_3 = \frac{9}{10}$$

$$p = p_1 \times p_2 \times p_3 = \frac{9}{10} * \frac{9}{10} * \frac{9}{10} = \frac{729}{1000}$$

مثال/ عند اجراء دراسة اجتماعية وجد 72%من الناس في العراق يحبون الشاي إذا اختير ثلاث اشخاص بصوره عشوائية من المجتمع. ماهي الاحتمالي للأشخاص الثلاثة الذين يحبون الشاي.

6- الاحتمالية المعتمدة على الاحداث

حدثين يكونان معتمدين اذا كان ضهور الحدث الأول يتأثر بالحدث الثاني لذلك فأن الاحتمالية سوف تتغير.

مثال / في أوراق اللعب تم اختيار ورقة بصوره عشوائية من 52 ورقة لعب بدون تغيير الموقع ثم اختيرت الورق الثانية. ماهي احتمالية انه في الورقة الأولى تظهر الملكة (الاختيار الأول) وفي الاختيار الثاني (الورقة الثانية) يظهر جاك (الولد)

الحل/

$P(\text{queen}) = 4/52$

$P(\text{jack after queen}) = 4/51$

$P(\text{queen and jack}) = 4/52 * 4/51 = 4/665$

7-قانون الإضافة في الاحتمالية

اذا كان الحدثين A,B متنافيين فان احتمال حدوث الحدثين A,B هو مجموع احتمال كل الاحداث

يقال ان الحدثين متنافيين اذا كان حدوث احدهما يمنع حدوث الاخر في ان واحد .

ولمجموعه من الاحداث المتنافية تكون الاحتمالية

$$P = P_1 + P_2 + P_3 + \ldots\ldots\ldots P_K$$

مثال /اناء يحتوي عل 5 اخضر ،3احمر، 2ازرق ،6 اصفر من الألوان هذه الالوان تختار بصوره عشوائية من الاناء وبعد ذلك تغير المواقع بعدها يختار الون الثاني ماهي احتمالية الأخضر والاصفر من الألوان .

الحل/

$$p_{(green)} = \frac{5}{16}$$

$$p_{(yellow)} = \frac{6}{16}$$

$$p_{(green\ and\ yellow)} = p_{(green)} * p_{(yellow)}$$

$$= \frac{5}{16} * \frac{6}{16} = \frac{15}{128}$$