وصف التوزيع الهندسي بواسطة شرط الأستقلالية

مشتاق عبد الغني شخير
قسم الرياضيات – كلية التربية – جامعة بابل

المستخلص :

هذا البحث يتناول شرط المتغيرات العشوائية $X_1 - X_2 , \ldots , X_{n-1} - X_n$ و X_n لكي تكون مستقلة تبادليا ، إذ أثبت البحث أن هذا الشرط هو أن X_i لها توزيع هندسي لكل $i = 1 , \ldots , n$.

Abstract :

This paper deals with the condition for the random variables $X_1 - X_2 , \ldots , X_{n-1} - X_n$ and X_n to be mutually independent , this paper shows that this condition is that X_i has a geometric distribution for each $i = 1 , \ldots , n$.

المقدمة :

لقد تمت دراسة التوزيعات الهندسية من قبل العديد من الباحثين ، ومن أهم هذه البحوث نشير إلى ناكراجا (Nagraja 1988) [1] حيث كانت له رؤيا قيمة في بحثه في هذا المجال، كما نشيرإلى بحث ناكراجا وسين وسرفاستافا (Nagraja , Sin and Srivastava1989)[2] حيث تناول بحثهم بعض المشاكل والمسائل المرتبطة بالموضوع . كذلك بحث تا جين ليانغ (Ta Chen Liang 1990) [5] يعتبر من البحوث المتميزة في مجال وصف التوزيعات الهندسية .

أما هذا البحث فيتناول تحديد شرط الأستقلال التبادلي لمجموعة متغيرات .

تمهيد :

لتكن $X_1 , X_2 , \ldots , X_n$ متغيرات عشوائية مستقلة متبادلة ذات قيم صحيحة غير سالبة ، لنفترض أن لكل X_i دالة احتمالية عندما $i = 1 , \ldots , n$:

$f_i (x) = f(x ; \theta_i)$ ، $f (x ; \theta_i) > 0$ لكل $x = 0 , 1 , \ldots$ ، بحيث أن الدوال الأحتمالية $f_i(x)$ لها صيغة مشتركة ولكن قيمتها تعتمد على المعلمة θ_i .

لتكن :

$$E = \{ X_i - X_{i+1} \geq 0 \} \quad \text{لكل} \quad i = 1 , \ldots , n-1 .$$

سنبحث عن الشرط الذي يجعل المتغيرات :

و X_n $X_1 - X_2 , \ldots , X_{n-1} - X_n$ متغيرات مستقلة متبادلة شرطيا .

نتائج رئيسية :

مبرهنة 1 :[1]

لتكن E حادثة يتحقق فيها الشرط $X_1 \geq X_2 \geq \ldots \geq X_n$ ، فأن العلاقتين الآتيتين متكافئتان :

1. كل من $X_1 - X_2$ و X_2 متغيران مستقلان .
2. X_1 يتوزع هندسياً .

البرهان : [3][4]

لتكن $X_1 - X_2$ و X_2 متغيرات مستقلة شرطياً على الحادثة E .

لكل عددين صحيحين غير سالبين b و c فأن :

$$P\{X_1 - X_2 \geq c, X_2 \geq b | E\} = P\{X_1 - X_2 \geq c | E\} P\{X_2 \geq b | E\} \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

معادلة (1) تكافىء :

$$\frac{P\{X_1 - X_2 \geq 0, X_2 \geq b, X_2 - X_3 \geq 0, \ldots\ldots\ldots, X_{n-1} - X_n \geq 0\}}{P\{X_1 - X_2 \geq 0, X_2 - X_3 \geq 0, \ldots\ldots\ldots, X_{n-1} - X_n \geq 0\}}$$

$$= \frac{P\{X_1 - X_2 \geq c, X_2 \geq b, X_2 - X_3 \geq 0, \ldots\ldots\ldots, X_{n-1} - X_n \geq 0\}}{P\{X_1 - X_2 \geq c, X_2 - X_3 \geq 0, \ldots\ldots\ldots X_{n-1} - X_n \geq 0\}}$$

$$= \frac{\sum_{x=b}^{\infty} P\{X_1 \geq x + c, X_3 \leq x, X_3 - X_4 \geq 0, \ldots\ldots, X_{n-1} - X_n \geq 0\} f_2(x)}{\sum_{x=0}^{\infty} P\{X_1 \geq x + c, X_3 \leq x, X_3 - X_4 \geq 0, \ldots\ldots, X_{n-1} - X_n \geq 0\} f_2(x)} \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

$$= \frac{\sum_{x=b}^{\infty} [1 - F_1(x + c - 1)] G(x) f_2(x)}{\sum_{x=0}^{\infty} [1 - F_1(x + c - 1)] G(x) f_2(x)} \equiv H(b, c)$$

حيث $G(x) = P\{X_3 \leq x, X_3 - X_4 \geq 0, \ldots\ldots, X_{n-1} - X_n \geq 0\}$ تكون موجبة لكل قيم x الصحيحة غير السالبة ، إذ إن $f_i(y) > 0$ لكل قيم $y = 0 , 1 , 2 , \ldots$ ولكل قيم $i = 1 , 2 , \ldots , n$.

معادلة (2) أعلاه تم التوصل اليها من خلال فرض أن كل من $X_1, \ldots\ldots\ldots, X_n$ هي متغيرات مستقلة متبادلة .

وبما أن الطرف الأيسر لمعادلة (2) مستقل بالنسبة الى c لكل b حيث b ثابت ، لذلك فأن

$H(b,c)$ يمكن اعتبارها دالة ثابتة للمتغير ذو القيمة الصحيحة

c (integer – valued variable c) ، لذلك فأن :

$H(b,c) - H(b\ ,\ c+1) = 0$ **وهذا يؤدي الى :**

$$\begin{aligned}
0 &= \left\{\sum_{x=b}^{\infty}[1-F_1(x+c-1)]G(x)f_2(x)\right\}\left\{\sum_{x=0}^{\infty}[1-F_1(x+c)]G(x)f_2(x)\right\} \\
&- \left\{\sum_{x=b}^{\infty}[1-F_1(x+c)]G(x)f_2(x)\right\}\left\{\sum_{x=0}^{\infty}[1-F_1(x+c-1)]G(x)f_2(x)\right\}..........(3) \\
&\equiv k(b,c)
\end{aligned}$$

لكل b و c حيث كل منهما عدد صحيح غير سالب .

لذلك فأن :

$$\begin{aligned}
0 &= k(b+1,c) - k(b,c) \\
&= [1-F_1(b+c)]G(b)f_2(b)\left\{\sum_{x=0}^{\infty}[1-F_1(x+c-1)]f_{2(x)}\right\} \\
&- [1-F_1(b+c-1)]G(b)f_2(b)\left\{\sum_{x=0}^{\infty}[1-F_1(x+c)]G(x)f_2(x)\right\}...........(4)
\end{aligned}$$

لكل عدد صحيح غير سالب b و c .

الآن بجعل c=0 وتعويضها في معادلة (4) وبعد إجراء بعض العمليات الجبرية البسيطة ، نحصل على :

$$\frac{f_1(b)}{1-F_1(b-1)} = 1-B.....................(5)$$

لكل قيم b = 0 , 1 , 2 , ... حيث :

$$B = \left\{\sum_{x=0}^{\infty}[1-F_1(x)]G(x)f_2(x)\right\} \Big/ \left\{\sum_{x=0}^{\infty}[1-F_1(x-1)]G(x)f_2(x)\right\}$$

مع ملاحظة أن B ثابت مستقل عن المتغير b وأن $0 < B < 1$.

إنَ فرضنا أن $f_1(x) > 0$ لكل قيم x .... , 2 , 1 , 0 = ، مع ما توصلنا اليه في معادلة (5) يؤدي الى ما يلي :

X_1 **لها توزيع هندسي مع دالة احتمالية** $f_1(x)$ **حيث :**

$f_1(x) = B^x(1-B)$ **حيث** $x = 0,1,2,........$.

الآن بعد إثبات أن X_1 تتوزع هندسياً ، فأن الطرف الأيمن من معادلة (2) هو دالة ثابتة بالنسبة للمتغير c ، وهذا يؤدي الى معادلة (1) . لذلك يمكننا القول أن الشرطين $X_1 - X_2$ و X_2 على الحادثة E مستقلان . [إنتهى برهان مبرهنة (1)] .

الآن لنفرض أن لكل $i = 1 , ... , n$ فأن X_i تتبع التوزيع الهندسي مع دالة إحتمالية $f_i(x)$ حيث : $f_i(x) = \theta_i^x (1-\theta_i), \quad x = 0,1,........$ وأن : $0 < \theta_i < 1$.

ولتكن : $Y_i = X_i - X_{i+1}$ فأننا سنحصل على صفة الأستقلالية الشرطية فيما يتعلق بالمتغيرات العشوائية $Y_1,.......,Y_n$ ، كما موضح في المبرهنة التالية .

مبرهنة (2) :

إذا كانت $Y_1,.......,Y_n$ هي متغيرات واقعة عندما E حادثة معلومة ، فأنها متغيرات مستقلة لكل $i = 1,........,n$ ، وأن Y_i تتوزع هندسياً بدالة الأحتمال الشرطية $f_i(y|E)$ حيث :

$$f_i(y|E) = \left(\prod_{j=1}^{i} \theta_j\right)^y \left(1 - \prod_{j=1}^{i} \theta_j\right) \qquad , y = 0,1,2,..........$$

البرهان :

بخطوات حسابية مباشرة نحصل على :

$$P(E) \equiv P(X_1 \geq X_2 \geq ...... \geq X_n)$$

$$= \prod_{i=2}^{n} [(1-\theta_i)(1-\theta_1 ......\theta_i)^{-1}] ....(6)$$

لتكن $a_1,..........,a_n$ أعداد صحيحة غير سالبة .

من تعريف المتغيرات العشوائية $Y_1,.......,Y_n$ نحصل على :

$$P\{Y_i = a_i, \quad i = 1,.......,n\} \;= P\{X_i = \sum_{j=1}^{n} a_j, \quad i = 1,.........,n\}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} [(1-\theta_i)\theta_i^{\sum_{j=i}^{n} a_j}] ....(7)$$

من معادلة (6) و (7) نحصل على :

$$P\{Y_i = a_i, \quad i = 1,.......,n | E\} \;= P\{Y_i = a_i, \quad i = 1,.......,n\} / P\{E\}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \left[\left(\prod_{j=1}^{i} \theta_j\right)^{a_i} \left(1 - \prod_{j=1}^{i} \theta_j\right)\right] ....(8)$$

معادلة (8) تعني أن المتغيرات العشوائية الشرطية $Y_1,......,Y_n$ على الحادثة E ، هي أيضاً متغيرات مستقلة متبادلة ، وأن Y_i لها دالة احتمالية شرطية هي :

$$f_i(y|E) = \left(\prod_{j=1}^{i}\theta_j\right)^y \left(1-\prod_{j=1}^{i}\theta_j\right) \quad \text{حيث} \quad y = 0,1,2,........... \quad \text{لكل} \quad i = 1,.......,n$$

[إنتهى برهان مبرهنة (2)] .

الاستنتاج :

إذا كانت $X_1,.........,X_n$ متغيرات عشوائية مستقلة ذات قيم صحيحة غير سالبة ، و X_i لها دالة احتمالية $f_i(x) = f(x;\theta_i)$ حيث $f(x;\theta_i) > 0$ لكل قيم $x = 0,1,2,.......$

وإذا كانت $E = \{X_1 \geq X_2 \geq ......\geq X_n\}$ ، فأن العلاقتان الآتيتان متكافئتان :

1. المتغيرات الشرطية على الحادثة E : $X_1 - X_2,........,X_{n-1} - X_n$ و X_n هي متغيرات مستقلة متبادلة .

2. لكل $i = 1,.......,n$ فأن X_i تتوزع هندسياً مع دالة احتمالية :

$f_i(x) = \theta_i^x(1-\theta_i), \quad x = 0,1,........$ لبعض قيم θ_i حيث $0 < \theta_i < 1$.

حيث أثبتنا هذين الأمرين من خلال :

1. إن الأستقلالية المتبادلة بين المتغيرات العشوائية $X_1 - X_2,........,X_{n-1} - X_n$ و X_n تؤدي الى أن المتغيرات $X_1 - X_2$ و X_2 هي متغيرات مستقلة شرطية .

2. من خلال مبرهنة (1) فأن X_1 تتبع توزيعاً هندسياً وأن $\theta_1 = B$ حيث B قد تم تعريفها في تلك المبرهنة .

3. من خلال الأفتراض ، فأن الدوال الأحتمالية للمتغيرات $X_1,.........,X_n$ لها صيغة مشتركة في الجميع .

هذه النقاط الثلاث تؤدي الى أن Xi لها توزيع هندسي لكل $i = 2,.........,n$.

المصادر :

1. Nagaraja , H.N. (1988). Record values and related statistics - a

review. Commun. Statist.-Theory Meth. , 17(7) , 2223-2238.
2. Nagaraja , H.N., Sen, P. and Srivastava , R.C. (1989). Some characterizations of geometric type distributions based on record values. Statistische Refie , 30, 147-155.
3. Shanti S.Gupta and Jianjum Li . (1999) . Empirical bayes tests with $n^{-1+\varepsilon}$ convergence rate in continuous one – parameter exponential family .
4. Shanti S.Gupta , Shuyuan Lte and Jianjum Li . (1999) . On selection procedures for exponential family distributions based on type -1 censored data .
5. Ta Chen Liang . wayne state university (1990) . a note on characterizing geometric distributions .