Republic of Iraq
Ministry of Higher Education
and Scientific Research
University of Babylon
Journal of Babylon University

بسم الله الرحمن الرحيم

جمهورية العراق
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
مجلة جامعة بابل
هياة التحرير

No. 002487

العدد: ج ك ب
التاريخ: / / ٢٠٠٨م

الى/ الدكتور حيدر جبار عبود المحترم

م/ قبول بحث للنشر

تهديكم هياة تحرير مجلة جامعة بابل أطيب تحياتها ونود اعلامكم بقبول بحثكم الموسوم

حل معادلة القطع المكافئ الخطية باستخدام متقاربة اسية معتمدة على معلمة صغيرة

للنشر في مجلة جامعة بابل المجلد (الخامس عشر) العدد (الثاني) من المجلة .

أ.د. علي شعلان الاعرجي
سكرتير التحرير
/ / ٢٠٠٨

حل معادلة القطع المكافىء الخطية بأستخدام متقاربة أسية المعتمده على معلمة صغيره

Dr. Hayder Jabbar Abood
College of Education

الملخص

في هذا البحث سندرس معادلة القطع المكافىء الخطية والبرهنة علـــى ان المتقاربـــة الأسية المعتمدة على معلمة صغيرة ε مع شرطين ابتدائيين ستكون حلاً لها.

المقدمة

تم خلال هذا البحث دراسة معادلة تفاضلية جزئية من الرتبة الثانية والدرجة الاولـــى (معادلة القطع المكافىء) بالنسبة للمتغيرين مستقلين x و t وأستخدام متقاربة أســية والتــي تعتمد على معلمه صغيره جداً ε، وقد تم أثبات بأن هذه المتقاربة الأسية تكون حلاً للمعادلـــة الأصلية وسوف يتم دراسة سلوك هذا الحل مع شرطين إبتدائيين معرّفين وشرطين اضـــافين مساعدين وهذا ما يميزنا عن الدراسات الســابقة وأخــص مــنهم : فقــد تنــاول الباحــث (Arscott , 1992) دراسة معادلة تفاضلية جزئية من الرتبة الاولـــى وإيجــاد الحــل لهــا بأستخدام بعض الدوال الدورية ، اما الباحث (Levenshtam ,2003) فقد تنـــاول دراســـة معادلة تفاضلية جزئيه من الرتبة الاولى وحلها من خلال متقاربة أسيه بالنسبه لدوال منظمـــة فقـــط، أمـــا الباحـــث (Techanoff & Samarcki , 1988) تنـــاول دراســـة معادلـــة تفاضـــلية اعتياديـــة مـــع شـــرطين إبتـــدائي وحـــدودي وآخـــرين (Smith ,1985; Kreyszig ,1990).

1- سندرس معادلة القطع المكافىء الخطية في الشكل الآتي :

$$\varepsilon\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)=A(t,x)\frac{\partial u}{\partial t}+B(t,x)u+F(t,x),\ldots\ldots\ldots\ldots.(1)$$

حيث هنا 0 <ε- معلمة صغيره . في هذا البحث سيتم دراسة سلوك حل المعادلـــة (1) مـــع الشرطين الابتدائين التالين :

$$u\Big|_{t=0}=\phi(x),\ \varepsilon\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\psi(x),\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(2)$$

وعندما $\varepsilon \longrightarrow 0$

وللدخول في حل المسألتين (1) و (2) نفرض الشرطين التالين :

I- الـــدوال $A(t,x)$ ، $B(t,x)$ و $F(t,x)$ تكـــون مســـتمرة فـــي المجـــال $D=\{t\geq o,-\infty<x<\infty\}$ والدالتين $\psi(x)\neq o,\phi(x)$ أيضا مستمره فـي المجـال عندما $-\infty<x<\infty$.

II- الدالة $A(t,x)\geq\delta=\text{constant}>0$ في المجال D.

فيمـا بعـد فـي هـذا البحـث سـنبرهن علـى($u(t,x,\varepsilon)$ (Singular perturbed) (Smith;1985) حلاً للمسألتين (1) و (2) عندما $0\leftarrow\varepsilon$ وسوف يقترب الـى الحـل (Degeneration solution equation).

من المعادلة (1) وعندما $\varepsilon=0$ ينتج ان :

$$A(t,x)\frac{\partial u_0}{\partial t}+B(t,x)u_o+F(t,x)=o,\qquad(3)$$

$u_0(t,x)$ – حلاً للمعادلة (3) وسوف لا يحقق الجزء الأول من الشرط الأبتدائي (2) ولكن سوف يحقق شرط ابتدائي آخر وهو :

$$u_o(o,x)=\phi(x)+\Delta(x),\qquad(4)$$

حيث ان$\Delta(x)$ – دالة (تسمى فـي بعـض المصـادر ومنهـا (Kreyszig ;1990). و(Smith;1985) ؟ بـ initial jump of a function للدالة u عندما t=o) .

٢- لأجل تعريف $\Delta(x)$ ، سنضرب طرفي المعادلة بـ ε و نجري التغير بتعويض كل t بـ $\varepsilon.\tau$ في المعادلتين (1) و (2) عندئذٍ نحصل على :

$$\varepsilon^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2u}{\partial\tau^2}=A(\varepsilon\tau,x)\frac{\partial u}{\partial\tau}+\varepsilon B(\varepsilon\tau,x)u+\varepsilon F(\varepsilon\tau,x),\qquad u|_{\tau=o}=\phi(x),\left.\frac{\partial u}{\partial\tau}\right|_{\tau=0}=\psi(x)\qquad(5)$$

من (5) عندما $\varepsilon=0$ ينتج ان :

$$\frac{\partial^2u}{\partial\tau^2}=-A(o,x)\frac{\partial u}{\partial\tau},\quad u|_{\tau=0}=\phi(x),\quad\left.\frac{\partial u}{\partial\tau}\right|_{\tau=o}=\psi(x)\qquad(6)$$

الآن بالرجوع الى التعويض $t=\varepsilon\tau$ وبأستخدام المعادلة (6) فحصل :

$$\varepsilon\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=-A(o,x)\frac{\partial u}{\partial t},\quad u(o,x,\varepsilon)=\phi(x),\quad\varepsilon\frac{\partial u}{\partial t}(o,x,\varepsilon)=\psi(x)\qquad(7)$$

ومن هناك نمتلك

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\psi(x)}{\varepsilon}\exp(-A(o,x)\frac{t}{\varepsilon}).$$

لتكن $t = t_\varepsilon = -\frac{1}{\delta}\varepsilon \ln \varepsilon$ ، عندها من التعبير $\frac{\partial u}{\partial t}$ أخذين بنظر الأعتبار الشرطين I وII عندما $\varepsilon \longrightarrow 0$ فنحصل:

$$\left|\frac{\partial u}{\partial t}(t_\varepsilon x, \varepsilon)\right| \le M, M = const. > o, \ldots\ldots\ldots\ldots(8)$$

ولأي فترة مغلقه على المحور x .
الآن لنفرض أن

$$\lim_{\varepsilon \to o} u(t_\varepsilon, x, \varepsilon) = \phi(x) + \Delta(x)$$

ولأي فترة مغلقة على المحور x. نجري التكامل للمعادلات في العلاقة (7) من صفر والى t_ε ينتج أن :

$$\varepsilon \frac{\partial u}{\partial t}(t_\varepsilon, x, \varepsilon) - \psi(x) = -A(o, x)[u(t_\varepsilon, x, \varepsilon) - \phi(x)] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(9)$$

الآن عندما $\varepsilon \to 0$ تتحول المعادلة (9) الى غاية اقتراب مع الأخذ بنظر الأعتبار (8) ولأي فترة مغلقة على المحور X نحصل على تعريف العلاقة التالية :

$$\Delta(x) = \psi(x) / A(o, x) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(10)$$

3- لتكن

$$u(t, x, \varepsilon) = u_\varepsilon(t, x) + w_\varepsilon(\tau, x), \tau = t/_\varepsilon \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(11)$$

عبارة عن متقاربة أسية بالنسبة الى معلمة صغيره ε والتي سنبرهن على انها حلاً (Solution Singular Perturbed) للمسألتين (1) و (2)حيث ان $u_\varepsilon(t, x)$ – دالة تسمى الدالة المنظمة (Regular Function) والتي يمكن كتابتها على شكل سلسلة بالنسبة الىε:

$$u_\varepsilon(\tau, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \Sigma^k u_k(t, x) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(12)$$

وكذلك فان $w_\varepsilon(\tau, x)$ – دالة وتسمى (Singular part for the asymptotic) والتي يمكن وضعها على الشكل سلسلة بالنسبة الى ε:

$$w_\varepsilon(\tau, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \Sigma^k w_k(\tau, x) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(13)$$

الجزء المنظم للمتقاربة $u_\varepsilon(t, x)$ نستطيع أن نُعرفهُ من خلال تعويضها في المعادلة (1) فنحصل على :

$$\varepsilon\left(\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial t^2}\right)=A(t,x)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}+B(t,x)u_\varepsilon+F(t,x),\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(14)$$

وبنفس الطريقة بتعويض الدالة $w_\varepsilon(t,x)$ في المعادلة (1) عندئذٍ نمتلك:

$$\varepsilon^2\frac{\partial^2 w_\varepsilon}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 w_\varepsilon}{\partial \tau^2}=A(\varepsilon\tau,x)\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \tau}+\varepsilon B(\varepsilon t,x)w_\varepsilon\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(15)$$

بعد تعويض العلاقتين الأسيتين (12) و (13) في (14) و (15) على التوالي ووضع الدالتين $A(\varepsilon\tau,x)$ و $B(\varepsilon\tau,x)$ على شكل متسلسلة أسية بالنسبة الى ε، ووضع في مستوى واحد للمعاملات لأسس متساوية بالنسبة الى ε لطرفي كلاً من المعادلات (14)و (15) عندئذٍ نمتلك معادلات تفاضلية اعتيادية متتالية ومن ثم يمكن تعريف كل المعاملات في (12) و (13) وكما سنثبته في ادناه :

لكل من $w_0(\tau,x),u_0(t,x)$ فأننا نمتلك المعادلتين التفاضليتين التاليتين :

$$A(t,x)\frac{\partial u_0}{\partial t}+B(t,x)u_o+F(t,x)=o,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(16)$$

$$\frac{\partial^2 w_o}{\partial \tau^2}+A(o,x)\frac{\partial w_o}{\partial \tau}=o,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(17)$$

ولتعريف كلاً من $w_k(\tau,x),u_k(t,x)$ وحين ان ....,k=1,2 فأننا نمتلك معـادلات تفاضـلية اعتيادية متتالية :

$$A(t,x)\frac{\partial u_k}{\partial t}+B(t,x)u_k=\Phi_k(t,x),\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(18)$$

$$\frac{\partial^2 w_k}{\partial t^2}+A(o,x)\frac{\partial w_k}{\partial \tau}=\psi_k(t,x),\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(19)$$

حيث ان $\Phi_k(t,x)$ دالة معرفة ومعتمدة على $u_i(t,x)$ عندما i>k وبعد حـل المعادلـة (18) يكون لدينا :

$$\Phi_k(t,x)=\frac{\partial^2 u_{k-1}}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u_{k-1}}{\partial t^2},\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(20)$$

اما الدالة $\psi_k(\tau_3 x)$ يمكن التعبير عنها من خلال $w_i(\tau,x)$ وعندما i<k :

$$\psi_k(\tau,x)=\frac{\partial^2 w_{k-2}}{\partial x^2}-\sum_{i=0}^{k-1}\left[\frac{\partial^{i+1}}{(i+1)!}A^{(i)}(o,x)\dot{w}_{k-i-1}+\frac{\partial^i}{i!}B^{(i)}(o,x)w_{k-i-1}\right]\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(21)$$

وللتعرف على جميع المعاملات في (12)و(13) فيجب أستخدام الشــرط الأبتــدائي (وذلــك بوضع المعادلة (11) مع الأخذ بنظر الأعتبــار (12) و (13) فــي الشــرط الأبتــدائي(٢)) ومقارنة المعاملات لأسس متساوية بالنسبة الى ε عندئذ نحصل على:

$$w_0(o,x)=\phi(x)-u_0(o,x), w_0(0,x)=\psi(x), \qquad (22)$$

$$w_k(o,x)=-u_k(o,x), \dot{w}_k(o,x)=\frac{-\partial u_{k-1}}{\partial t}(o,x), \qquad (23)$$

,k=1,2,3,……..

الشرط الأبتدائي لـــ $u_0(t,x)$ يعرف بمساعدة الشرط الأبتدائي في (4) أي أن :

$$u_o(o,x)=\phi(x)+\Delta(x) \qquad (24)$$

نتحول الآن الى المسألتين (16)و(24) وبتكامل المعادلة (17) من o الى τ آخــذين بنظــر الأعتبار (22) ، (24) و (10) فأننا سنحصل على :

$$\frac{\partial w_o}{\partial \tau}+A(o,x)w_0=o,$$

$$w_0(o,x)=-\Delta(x)=-\frac{\psi(x)}{A(o,x)}.$$

وبالضبط $A(o,x)\geq\delta>o$ فانه من الواضح الحل هو $w_0=o$ عندما $\tau\to+\infty$ وبهذا المعنى فان

ومن ثم $\lim_{\tau\to+\infty} w_0(\tau,x)=o$

من اعلاه نستنتج ان : $\lim_{\tau\to+\infty} \dot{w}_o(\tau,x)=o$

وبنفس الطريقه اعلاه فان : $w_0(\tau,x)=o,$

$$u_0(t,x)=o.$$

الآن نجد الدالتين $w_k(\tau,x)$ و $w_k(t,x)$ ولكل k=1,2,… بأستخدام المعادلة (18) ولكل k=1,2,.. وتحل هذه بواسطة نظرية (Variation theorem) ولكن الشرط الأبتــدائي لكــل $u_k(t,x)$ و k=1,2,…. لحد الآن غير معروف، ولأجل إيجاد تعريف هذه الــدوال ســندرس الشرط الأبتدائي للدالتين $u_k(o,x)$ و $w_k(o,x)$ ولأجل تعريف هاتين الدالتين فأننــا سنضــع افتراض أضافي بأن الدالة $w_k(\tau,x)$ تقترب الى الصفر عندما $\tau\to+\infty$. عنــدها بأســتخدام

التكامل لطرفي المعادلة (19) بالنسبة الى τ (من o والى ∞) مع الأخذ بنظـر الأعتبـار المعادلة (23) بعد ذلك ينتج ان :

$$\frac{\partial u_{k-1}}{\partial t}(o,x)+A(o,x)u_k(o,x)=\int_o^{\infty}\psi_k(\tau,x)d\tau,$$

وحيث أن $A(o,x)\neq o$ فانه يمكن تعريف الشرط الأبتدائي للدوال $u_k(o,x)$:

$$u_k(o,x)=\frac{\int_o^{\infty}\psi_k(\tau,x)d\tau-\frac{\partial u_{k-1}(o,x)}{\partial t}}{A(o,x)},k=1,2,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(25)$$

الآن نكامل طرفي المعادلة (19) من (o الى τ) مع الأخذ بنظر الأعتبار المعادلتين (٢٣) و (25) فسنحصل على ان :

$$\begin{aligned}&\dot{w}_k(\tau,x)+A(o,x)w_k(\tau,x)=-\int_{\tau}^{\infty}\psi_k(\tau,x)d\tau,\\&w_k(o,\tau)=-u_k(o,x),k=1,2,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(26)\end{aligned}$$

في ادناه سنبرهن على ان حل المسألتين (19)و (23) وحيث k=1,2,.... مع العلاقــة (25) تحقق الشرط

$$\lim_{\tau\to\infty}w_k(\tau,x)=\lim_{\tau\to\infty}\dot{w}(\tau,x)=0,$$

وبهذا المعنى فان العلاقة (11) تكون حلاً للمسألتين (1) و (2).

مبرهنة : الدوال الحدودية $w_k(\tau,x)$ والتي هي حلـولاً للمسـألتين (19)و(23) وحيـث ان k=0,1,2,.... ومع ان $\tau\geq o$ و $a\leq x\leq b$ تمتلك التقدير الآتي:

$$\begin{aligned}&\left|\frac{\partial^m w_k}{\partial x^m}(\tau,x)\right|\leq M\exp(-\alpha\tau),\\&\left|\frac{\partial^{m+1}w_k}{\partial\tau\partial x^m}(\tau,x)\right|\leq M\exp(-\alpha\tau),m=o,1,2,\ldots\ldots\ldots(27_k)\end{aligned}$$

حيث ان $M>0,\alpha>o$ ثوابت غير معتمده على ε .

البرهان :- سنبرهن في البداية التقدير عندما K=0 للمتراجحه اعلاه أي ان (27) ولأجـل ذلك سنجري التكامل على طرفي المعادلة (17) من $0 \leftarrow \tau$.
آخذين بنظر الأعتبار المعادلات (22) ، (25) و (10) فأننا سنحصل علـى مسـألة للدالـة $w_0(\tau,x)$:

$$\frac{\partial w_0}{\partial \tau}+A(o,x)w_0=0, w_0(o,x)=\varphi(x)-u_0(o,x)=-\Delta(x)........(28)$$

وايضاً من الشرطين (I)و (II) نمتلك التقدير الآتي (أنظر الى [٥]):

$$|w_0(\tau,x)|\le M\exp(-\alpha\tau), \quad \left|\frac{\partial w_0}{\partial \tau}(\tau,x)\right|\le M\exp(-\alpha\tau)$$

$\tau\ge o, a\le x\le b.$

وبهذا فان التقدير (27_0) برهن ولكل m=0 .

لنفترض بان التقدير (27_0) متحقق لكل i=1,2,…,m-1 أي أن:

$$\left|\frac{\partial^i w_0}{\partial x^i}(\tau,x)\right|\le M\exp(-\alpha\tau), \quad \left|\frac{\partial^{i+1} w_0}{\partial x^i\partial \tau}(\tau,x^*\right|\le M\exp(-\alpha\tau).........(29)$$

الآن نبرهن (27_0) لكل m=i (الأستفادة من مفهوم استقراء الرياضي).
وبالأشتقاق المعادلة (28) i من المرات بالنسبة الى x فأننا نمتلك:

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(\frac{\partial^i w_0}{\partial x^i})+A(o,x)\frac{\partial^i w_0}{\partial x^i}=h(\tau,x), \quad \frac{\partial^i w_0}{\partial x^i}(o,x)=-\frac{d^i}{dx^i}\Delta(x),..............(30)$$

حيث ان

$$h(\tau,x)=-\sum_{j=0}^{i-1}(_i^j\frac{\partial^{i-j}A}{\partial x^{i-j}}(o,x)\frac{\partial^j w_0}{\partial x^j}.$$

ومن الشرط (I) والتقدير في (29) للدالة $h(\tau,x)$ نمتلك التقدير:

$$|h(\tau,x)|\le M\exp(-\alpha\tau), \tau\ge 0, a\le x\le b.$$

الآن حل المعادلة (30) وبأستخدام نظرية (variation theorem) (Dieudonne ,1984)
آخذين بنظر الأعتبار الشرط (II) فأننا بحق نمتلك التقدير (27_0) لكل i=m . وبهذا المعنـى فاننا برهنا التقدير (27_0) لأي عددm. ومن ثم نفرض ان التقدير (27_i) متحقق لكل m بحيث

انه i=0,1,1,….,k-1 . سنبرهن الآن i=k . ولأجل ذلك نتحول الى المسـألة (26) ومـن العلاقة (21) ايضاً فانه للدوال $\psi_k(\tau,x)$ تمتلك التقدير

$$|\psi_k(\tau,x)| \le p\exp(-\alpha\tau) \ ,$$

$$.p>0, \tau>0, a \prec x \le b, \text{...........}(31)$$

لتكن $0<\alpha_0<\alpha$ عندها يوجد M>o بحيث انه يحقق المتراجحة :

$$p\exp(-\alpha\tau) \le M\exp(-\alpha_0\tau), \qquad \tau \ge 0.$$

وبهذا المعنى نمتلك التقدير الآتي

$$|\psi_k(\tau,x)| \le M\exp(-\alpha\tau), \tau \ge 0, a \le x \le b \text{....................}(31)$$

ومن هنا مباشرة يمكن أيجاد التكامل الموجود في العلاقة (25) ومن ثم ايجاد كل قـيم $u_k(o,x)$.

اما حل المعادلة (26) بأخذ بنظر الاعتبار الشرط (II) والتقدير (31) فأننا مباشرة نمتلك التقدير .

$$|w_k(\tau,x)| \le M\exp(-\alpha\tau), \tau \ge o, a \le, x \le, b.$$

عندها من المعادلة (26) و (31) سنحصل على التقدير:

$$\left|\dot{w}_k(\tau,x)\right| \le M\exp(-\alpha\tau), \tau \ge 0, a \le x \le b,$$

وبهذا فان التقدير (27_0) برهن عندما m=0 ، وبالتالي فان الأفتراض بانـــه التقـــدير (27_k) متحقق لكل i=o,1,..,m-1

$$\left\{\left|\frac{\partial^i w_k}{\partial x^i}(\tau,x)\right|, \left|\frac{\partial^{i+1} w_k}{\partial x^i \partial\tau}(\tau,x)\right|\right\} \le M\exp(-\alpha\tau), \text{...............}(32)$$

وهذا متحقق بنفس الطريقة عندما k=0 ويمكن البرهنة على حقيقة التقدير (32) ولكل i=m . وبنفس الطريقة اعلاه يمكننا ايجاد التقدير مماثلاً للدالة $u_k(t,x)$ عندئذٍ فقد برهن علـــى انـــه الدوال في (11) تكون حلاً للمسألتين في (1) و (2).

المصادر

Arscott F.M.(1992) Periodic differential equations . Oxford Univ.

Dieudonne J. (1984) Foundations of modern analysis. Moscow Hayk.

Magnus W., Winkler S.(1986) Differentiate equation. Interscience tracts in pure and applied mathematics , No.20,NowYork.

Levenshtam V.B. (2003) Asymptotic integration for differential equation with quick oscillatory composed. Math. Cb. T. 81N:1357.

Techanoff A.N. Samarcki A.A. (1988) Mathematical. Physicist equation. Naok. Moscow.

Kreyszig E. (1990). Introductory functional analysis with applications. John Wiley and Sons. Now York.

Smith D.R. (1985). Singular- Perturbation Theory. An Introduction with application . Cambridge Univ. Press Cambridge.

Solution the Linear Parabola Equation By Using Asymptotic Expansion With Respect to Small Parameter

Dr. Hayder Jabbar Abood

Abstract

In this paper a studying the solution for asymptotic expansion with respect to ε for the linear parabola equation with two initial conditions.