الأستقلال التبادلي الشرطي بالأعتماد على التوزيع الأسي

مشتاق عبد الغني شخير
كلية التربية-قسم الرياضيات

زاهر عبد الهادي
كلية التربية-قسم الرياضيات

المستخلص :

هذا البحث يتناول شرط المتغيرات العشوائية $Y_1-Y_2,\dots\dots,Y_{n-1}-Y_n$ و Y_n لكي تكون مستقلة تبادليا ، إذ أثبت البحث أن هذا الشرط هو أن Y_i لها توزيع أسي لكل i = 1 , …. , n .

Abstract :

This paper deals with the condition for the random variables $Y_1-Y_2,\dots\dots,Y_{n-1}-Y_n$ and Y_n to be mutually independents , this paper shows that this condition is that Y_i has an exponential distribution
for each i = 1 , …. , n .

المقدمة :

أن مسألة وصف التوزيعات الأسية قد درست من قبل الباحثين لمدة طويلة . ومن الأبحاث القيمة البحث المقدم من قبل الباحث إحسان الله (Ahsanullah . 1984) ،
و كاذر (Gather . 1989) [2] و كذلك توو و لين (Too and Lin . 1989) من بين البحوث المتعلقة بهذا المجال .

في هذا البحث إفترضنا عدة أمور وهي :

1) لتكن $Y_1,\dots\dots,Y_n$ متغيرات مستقلة متبادلة عشوائية غير سالبة بحيث أنه :
لكل $i=1,\dots\dots,n$ ، فأن Y_i لها دالة توزيع مستمرة مطلقة $F(x\ \theta_i)$; بحيث :

$F(x = F(\frac{x}{\theta_i})\ \theta_i)$; ، $0\le F\le 1$ ، $\theta_i>0$ و x واقعة في الفترة $]0,\infty[$.

سنحاول إيجاد الشرط الضروري للمتغيرات $Y_1-Y_2,\dots\dots Y_{n-1}-Y_n$ و Y_n لتكون مستقلات متبادلة شرطياً .

2) لتكن $f_i(x)$ هي دالة الكثافة للمتغير Y_i بحيث : $f_i(x)>0$ لكل $x>0$.

لتكن A تمثل الحادثة بحيث : $A=\{Y_i-Y_{i+1}>0\}$ لكل $i=1,\dots\dots,n-1$ ،

ستكون لدينا المبرهنة التالية :

مبرهنة 1 : [1][3]

المتغيران Y_1-Y_2 و Y_2 مستقلان إذا وفقط إذا كان Y_1 لها توزيع أسي .

البرهان :

الأستقلال الشرطي يؤدي الى أن : لكل عددين a و b حيث كل منهما أكبر من الصفر فأن :

$$P\{Y_1 - Y_2 > a, \quad Y_2 > b | A\} = P\{Y_1 - Y_2 > a | A\} P\{Y_2 > b | A\} ....(1)$$

وبعد إجراء بعض العمليات الحسابية على معادلة (1) نحصل على :

$$\frac{P\{Y_1 - Y_2 > 0 \ , Y_2 > b, \ Y_2 - Y_3 > 0 \ , ... , Y_{n-1} - Y_n > 0\}}{P\{Y_1 - Y_2 > 0 \ , \ Y_2 - Y_3 > 0 \ , ... , Y_{n-1} - Y_n > 0\}}$$

$$= \frac{P\{Y_1 - Y_2 > a \ , Y_2 > b, \ Y_2 - Y_3 > 0 \ , ... , Y_{n-1} - Y_n > 0\}}{P\{Y_1 - Y_2 > a \ , \ Y_2 - Y_3 > 0 \ , ... , Y_{n-1} - Y_n > 0\}}$$

$$= \frac{\int_{y=b}^{\infty} P\{Y_1 > y + a \ , Y_3 < y \ , Y_3 - Y_4 > 0 \ , ... , Y_{n-1} - Y_n > 0\} \ f_2(y) \ dy}{\int_{y=0}^{\infty} P\{Y_1 > y + a \ , Y_3 < y \ , Y_3 - Y_4 > 0 \ , ... , Y_{n-1} - Y_n > 0\} \ f_2(y) \ dy} ....(2)$$

$$= \frac{\int_{y=b}^{\infty} [1 - F_1(y + a)] \ G(y) \ f_2(y) \ dy}{\int_{y=0}^{\infty} [1 - F_1(y + a)] \ G(y) \ f_2(y) \ dy} \equiv H_b(a)$$

حيث : $G(y) = P\{Y_3 < y \ , Y_3 - Y_4 > 0 \ , ... , Y_{n-1} - Y_n > 0 \ \}$

وأن المساواة الأخيرة تم التوصل اليها بمعية فرض أن $Y_1, ..., Y_n$ متغيرات مستقلة متبادلة ، مع ملاحظة أن لكل ثابت $b \geq 0$ فأن $H_b(a)$ دالة ثابتة للمتغير a ،

لذلك فأن : $\frac{\partial H_b(a)}{\partial a} = 0$ ، مما يؤدي إلى أن :

$$\begin{aligned} M_a(b) \equiv & \int_{y=b}^{\infty} f_1(y+a) \ G(y) \ f_2(y) \ dy \ \times \int_{y=0}^{\infty} [1 - F_1(y+a)] \ G(y) \ dy \ - \\ & - \int_{y=b}^{\infty} [1 - F_1(y+a)] G(y) \ f_2(y) dy \times \int_{y=0}^{\infty} f_1(y+a) \ G(y) \ f_2(y) \ dy \\ & = 0 \ . \end{aligned}$$

وبأخذ $a = 0$ وبأشتقاق $M_0(b)$ بالنسبة الى b نحصل على ما يلي :

$$\frac{f_1(b)}{1 - F_1(b)} = \frac{\int_{y=0}^{\infty} f_1(y) \ G(y) \ f_2(y) \ dy}{\int_{y=0}^{\infty} [1 - F_1(y)] \ G(y) \ f_2(y) \ dy} \ .... (3)$$

إن نـاتج معادلـة (3) يمثـل قيمـة ثابتـة موجبـة ، لأننـا فرضـنا أن لكـل F_i حيـث $i = 1, ..., n$ فـأن x واقعة في الفترة $(\ ]0, \infty[\ )$.

وبما أن b يمكن أن تكون أي عدد موجب ' لذلك معادلة (3) تؤدي الى أن F_1 هو توزيع أسي بوسط مساوٍ الى :

$$\int_{y=0}^{\infty} [1-F_1(y)]\, G(y)\, f_2(y)\, dy \;/\; \int_{y=0}^{\infty} f_1(y)\, G(y)\, f_2(y)\, dy \;.$$

وبما أن F_1 توزيع أسي ، فأن الطرف الأيمن لمعادلة (2) مستقل بالنسبة لقيمة a ،
وبذلك تكون $H_b(a)$ دالة ثابتة بالنسبة للمتغير a ، وهذا يؤدي الى
معادلة (1) . لذلك يكون المتغيران Y_1-Y_2 و Y_2 مستقلان شرطيان .

[انتهى برهان مبرهنة 1]

ملاحظة : [5]

في مبرهنة (1) ، أستفدنا من فرض أن F_i تقع في الفترة $[0,\infty)$ لكل $i = 1, \ldots\ldots, n$ ،
لكن ليس من الضروري على F_i أن تنتمي الى نفس الصنف من التوزيعات .

نظرية 1 :

لتكن F_i تنتمي الى نفس الصنف من التوزيعات ، بحيث :

$F_i(x) = F(x = F(\dfrac{x}{\theta_i})\, \theta_i)$; عندما تكون $\theta_i > 0$ و x واقعة في الفترة $]0,\infty[$ ، فأن الشرط الضروري للمتغيرات الشرطية على الحادثة A :

Y_n و $Y_1 - Y_2$, $Y_2 - Y_3$, ……… , Y_{n-1} - Yn لتكون مستقلة تبادلياً هو Yi لها توزيع أسي لكل $I = 1$, …. , n .

البرهان :

إن شرط الأستقلال التبادلي للمتغيرات $Y_1 - Y_2$, …… , Y_{n-1} - Y_n على الحادثة A يعني أن Y_2 و $Y_1 - Y_2$ هي متغيرات مستقلة شرطياً .

لذلك فأن Y_1 لها توزيع أسي اعتمادا على مبرهنة (1) .

و بما أن Y_1 لها توزيع F_i ينتمي الى نفس الصنف من التوزيعات لكل $i = 1, \ldots., n$

فأن ذلك يؤدي الى أن Y_i لها توزيع أسي لكل $i=2,\ldots.,n$ (لأن F_1 دالة توزيع أسي) .

(أنظر مبرهنة (ii) 2.1 من بحث ساكروتز و سامويل [4]) .

الأستنتاج :

إذا كانت F_i تنتمي الى نفس الصنف من التوزيعات ، بحيث :

$F_i(x) = F(x = F(\frac{x}{\theta_i})\ \theta_i);$ عندما تكون $\theta_i > 0$ ، x واقعة في الفترة $(\ [0,\infty)$ ، فأن الشرط الضروري للمتغيرات الشرطية على الحادثة A :

Y_n و $Y_1 - Y_2\ ,\ Y_2 - Y_3\ ,\ \ldots\ldots\ldots,\ Y_{n-1} - Y_n$ لتكون مستقلة تبادلياً هو Y_i لها توزيع أسي لكل $i = 1, \ldots, n$.

المصادر :

1. Ahsanullah,M.(1984). A characterization of the exponential distribution by higher order gap . Metrika 31,323-326.
2. Gather, U. (1989). On a characterization of the exponential distribution by properties of order statistics. Statistics and Probability Letters 7 , 93-96 .
3. J. Li, C. Liu, J. Zhang. (2007). Robust factor analysis using the multivariate t-distribution. Metrica 29, 178-181 .
4. Sackrowitz, H. and Samuel-Gahn, E. (1984) Estimation of the mean of aselected negative exponential population. J. R. Statist. Soc. B46, 242-249 .
5. S. S. Gupta, J. Li. (2001). On empirical bayes procedures for selecting good populations in positive exponential family.