٢- الإزاحة المستعرضة للوتر المتذبذب بتأثير قوة خارجية

في هذا البند نحل مسالة الوتر المتجانس المثبت الطرفين معلوم الإزاحة الابتدائية والسرعة الابتدائية المتذبذب بفعل قوة الشد وقوة خارجية F(x,t) وهذه المسالة تتمثل كما لاحظنا سابقا في الحالة الأولى من هذا الفصل بالمعادلة التالية :-

$$(15) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x,t)$$

بحيث يتحقق الشرطان الحدوديان التاليان :-

$$u(0,t) = 0, u(\ell,t) = 0$$

حيث ان $0 \le x \le \ell$

حيث l هو طول الوتر والشرطان الابتدائيان هما

$$u(x,0) = f(x) \quad , u_t(x,0) = g(x)$$

حيث f(x)، g(x) دالتان معلومتان .

ان حل المسالة هو :

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t).\sin\frac{n\pi}{l}x + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos\frac{n\pi c}{l}t + B_n\sin\frac{n\pi c}{l}t).\sin\frac{n\pi}{l}x$$

............(16)

وهي الازاحة المستعرضة لوتر معلوم الازاحة والسرعة الابتدائيتين بوجود قوة خارجية

حيث ان

$$T_n(t) = \frac{l}{n\pi c}\int_0^t b_n(s).\sin\frac{n\pi ct}{l}(t-s)ds$$

و $b_n(s)$ هي المعاملات الفورية الجيبية للدالة F(x,t) .

و A_n هي المعاملات الفورية الجيبتمامية للدالة f(x) .

و $\frac{n\pi c}{l}B_n$ هي المعاملات الفوريـة الجيبيـة للدالـة g(x) ،

n=1,2,3,............

مثال / وتر مطـاطي متجانس مثبت الطرفين طولـه 3 سم يتذبـذب بقوة الشد وقوة خارجية تساوي x ،احسب ازاحة هذا الوتر عند النقطة x في اللحظـة t اذا علمـت ان ازاحتـه الابتدائيـة تسـاوي $\sin\pi x$ وسـرعته الابتدائية تساوي $\cos\pi x$.

Solution:-

المعادلة التفاضلية للمسالة هي :-

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x \qquad , 0 \le x \le 3$$

حيث

u(0,t)=0 ، u(3,t)=0

$$u(x,0) = \sin \pi x \quad , u_t(x,0) = \cos \pi x$$

نحسب $B_n, A_n, b_n(t)$ في صيغة الحل (16) .

بما ان $b_n(t)$ هي المعاملات الفورية الجيبية للدالة F(x,t)=x

$$\therefore b_n(t) = \frac{2}{3}\int_0^3 x \sin \frac{n\pi}{3} x dx = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$$

بمـــا ان A_n هـــي المعـــاملات الفوريـــة الجيبتاميـــة للدالـــة $f(x) = \sin \pi x$

$$\therefore A_n = \frac{2}{3}\int_0^3 \sin \pi x . \cos \frac{n\pi}{3} x dx = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & , \quad n = 3, n \quad is\ even \\ \dfrac{4n}{(9-n^2)\pi} & , n\ is\ odd, n \ne 3 \end{array} \right\}$$

كما ان $\frac{n\pi c}{3} B_n$ هي المعاملات الفورية الجيبية للدالة $\cos \pi x$ أي ان

$$\frac{n\pi c}{3} B_n = \frac{2}{3}\int_0^3 \cos \pi x . \cos \frac{n\pi}{3} x dx = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & , n \ne 3 \\ \dfrac{3}{n\pi c} & , n = 0 \end{array} \right\}$$

ولايجاد $T_n(t)$ نلاحظ بموجب الصيغة (16) ان :-

$$T_n(t) = \frac{1}{n\pi c}\int_0^t b_n(s) . \sin \frac{n\pi c}{3}(t-s) ds = \frac{18(-1)^{n+1}}{n^3 \pi^2 c^2}[1 - \cos \frac{n\pi ct}{3}]$$

وبالتعويض عن قيم A_n, B_n, T_n في الصيغة (16) للحل العام ينتج ان :-

$$u(x,t) = \frac{18}{\pi^2 c^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^3}(1 - \cos \frac{n\pi ct}{3}) \sin \frac{n\pi x}{3} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4(2n+1)}{[9-(2n+1)^2]} \cos \frac{(2n+1)\pi c}{3} \sin \frac{n\pi x}{3} + \sin \pi ct . \sin \pi x$$