

قوانين مهمة

- 1- $\arg (Z_1 \cdot Z_2) = \arg Z_1 + \arg Z_2$
 $= \Theta_1 + \Theta_2$
- 2- $\arg (Z_1 / Z_2) = \arg Z_1 - \arg Z_2$, $Z_2 \neq 0$
 $= \Theta_1 - \Theta_2$
- 3- $\arg (1 / Z) = - \arg Z$, $Z \neq 0$
 $= - \Theta$
- 4- $|Z_1 \cdot Z_2| = |Z_1| \cdot |Z_2| = r_1 \cdot r_2$
- 5- $\frac{|Z_1|}{|Z_2|} = \frac{r_1}{r_2}$, $Z_2 \neq 0$

Proof (1) :

$$\begin{aligned} \text{Let } Z_1 &= r_1 (\cos \Theta_1 + i \sin \Theta_1) \text{ \& } Z_2 = r_2 (\cos \Theta_2 + i \sin \Theta_2) \\ \therefore Z_1 \cdot Z_2 &= r_1 r_2 [(\cos \Theta_1 + i \sin \Theta_1) \cdot (\cos \Theta_2 + i \sin \Theta_2)] \\ &= r_1 r_2 [(\cos \Theta_1 \cos \Theta_2 - \sin \Theta_1 \sin \Theta_2) + i (\sin \Theta_1 \cos \Theta_2 + \sin \Theta_2 \cos \Theta_1)] \\ &= r_1 r_2 [\cos (\Theta_1 + \Theta_2) + i \sin (\Theta_1 + \Theta_2)] \end{aligned}$$

يترك الباقي كواجب للطالب

ملاحظة مهمة / نستنتج من خلال هذه القوانين بأنه عندما تكون هناك عملية ضرب للأعداد المركبة فإننا نقوم بضرب أنصاف أقطار هذه الأعداد وجمع زواياها، وعندما تكون عملية قسمة فإننا نقسم أنصاف الأقطار ونطرح الزوايا.

Ex .: let $Z_1 = 1 + i$, $Z_2 = 1 - i \sqrt{3}$ find $\arg (Z_1 \cdot Z_2)$

$$\begin{aligned} \text{Sol .: } Z_1 = 1 + i &\Rightarrow r_1 = \sqrt{2}, \quad \Theta_1 = \frac{\pi}{4} \\ Z_2 = 1 - i \sqrt{3} &\Rightarrow r_2 = 2, \quad \Theta_2 = \frac{-\pi}{3} \end{aligned}$$

Since $Z_1 \cdot Z_2 = r_1 r_2 [\cos (\Theta_1 + \Theta_2) + i \sin (\Theta_1 + \Theta_2)]$

$$\therefore Z_1 \cdot Z_2 = 2 \sqrt{2} \left[\cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{-\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{-\pi}{3} \right) \right]$$

$$\therefore \arg (Z_1 \cdot Z_2) = \frac{\pi}{4} + \frac{-\pi}{3} = -\frac{\pi}{12}$$

س/ بدون استخدام الصيغة القطبية اثبت أن العدد المركب الناتج من $(Z_1 \cdot Z_2)$ يكون عدد مركب بنصف قطر r هو $(2\sqrt{2})$ وزاوية هي $(-\frac{\pi}{12})$.

تمارين متنوعة

س1/ بفرض أن $Z_1 \cdot Z_2 \neq 0$ استخدم الصيغة القطبية (r, θ) لإثبات أن:

$$\operatorname{Re}(Z_1 \bar{Z}_2) = |Z_1||Z_2| \Leftrightarrow \theta_1 - \theta_2 = 2n\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

س2/ استخدم الصيغة القطبية لإثبات أن $i(1-i\sqrt{3})(\sqrt{3}+i) = 2 + i2\sqrt{3}$

Q3/suppose that $Z_1 \cdot Z_2 \neq 0$ use the polar form to show that

$$|Z_1 + Z_2| = |Z_1| + |Z_2| \Leftrightarrow \theta_1 - \theta_2 = 2n\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Q4/ Prove or disprove $\operatorname{Arg}(Z_1 \cdot Z_2) = \operatorname{Arg} Z_1 + \operatorname{Arg} Z_2$

Hint: $Z_1 = -1$ and $Z_2 = i$

Q5/ Show that: $|Z_1 + Z_2|^2 + |Z_1 - Z_2|^2 = 2(|Z_1|^2 + |Z_2|^2)$

Q6/ Prove that $\sqrt{2}|Z| \geq |\operatorname{Re}(Z)| + |\operatorname{Im}(Z)|$

Q7/ Prove that:

1) $||Z_1| - |Z_2|| \leq |Z_1 + Z_2|$ Hint: let $|Z_1| = |Z_1 + Z_2 + (-Z_2)|$,

$$|Z_2| = |Z_2 + Z_1 + (-Z_1)|$$

2) $||Z_1| - |Z_2|| \leq |Z_1 - Z_2|$ Hint: let $|Z_1| = |Z_1 - Z_2 + Z_2|$

$$|Z_2| = |Z_2 - Z_1 + Z_1|$$

Q8/ let $Z_1 = 1 + i, Z_2 = \sqrt{3} - i$ find $\arg(Z_1 / Z_2)$, sol. = $\frac{5\pi}{12}$

س9/

إذا كان $z_1 = 1+2i$ و $z_2 = 1-i$ أوجد قيمة $\operatorname{Im}\left(\frac{z_1}{z_2 - i}\right)$.

س10/

إذا كان $z_1 = 1+i$ و $z_2 = 1-i$ و $z_3 = i$ أوجد قيمة كل من $\operatorname{Re}\left(\frac{iz_1}{2z_2 + z_3}\right)$ و $\operatorname{Arg}\left(\frac{z_1 z_2}{z_3}\right)$.