

• طريقة اويلر المتطورة :-

وضع heun صيغة تعالج الخطا الذي يسببه حذف الحدود من الثالث الى الاخير في متسلسلة تايلر تتمثل تلك الصيغة باعتماد الوسط الحسابي لقيمة y' في النقطتين (x_i, y_i) و (x_{i+h}, y_{i+h})

$$Y_{i+1}^{k+1} = y_i + \frac{h}{2} [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^k)]$$

تستخرج y_{i+1}^k بحسب صيغة اويلر الاعتيادية

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$$

نلاحظ من الشكل ان طول المستقيم BF هو قيمة تقريبية لـ $y(x_0+h)$ وهو بعيد عن القيمة الحقيقية ، وعندما نرسم المستقيم ce موازيا لمماس الدالة في النقطة $(x_0+h, y(x_0+h))$ فان ميل المستقيم ce يمثل $y'(x_0+h)$ ويكون طول المستقيم be مساويا لـ:

$$be = y(x_0) + hf(x_0+h, y(x_0+h))$$

وان القيمة الحقيقية $y(x_0+h)$ الممثلة بطول المستقيم bg تمثل بالوسط الحسابي لطول المستقيمين be, bf ويكون لدينا في طريقة اويلر صيغتان ، واحدة تخمينية لاستخراج $y(x_i+h)$ والاخرى تصحيحية لاستخراج قيمة

$$y(x_i+h)$$

$$y(x_i+h) = y(x_i) + hf(x_i, y_i)$$

$$Y(x_i+h) = y(x_i) + \frac{h}{2} [f(x_i, y_i) + f(x_{i+h}, y_{i+h})]$$

وتعتبر طريقة اويلر المتطورة من الطرق الضمنية لان y_{i+1} تكون موجودة ضمن متغيرات الدالة f .

مثال :- استخدم صيغة اويلر المتطورة لاستخراج $y(0.1)$ في المعادلة التفاضلية التالية ؟

$$y' = \frac{2x(y+1)}{y}$$

عندما $h=0.1$ ، $y(0)=-2$

الحل:-

$$y_{i+1}^k = y_i + hf(x_i, y_i)$$

$$\begin{aligned} y_{(0.1)}^k &= (-2) + 0.1f(0, -2) \\ &= -2 + 0.1 \left[\frac{2(0)(-2+1)}{-2} \right] \\ &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_{i+1}^{k+1} &= y_i + \frac{h}{2} [f(x_i, y_i) + f(x_{i+h}, y_{x_{i+h}})] \\ y_{(0.1)}^{k+1} &= -2 + 0.05 [f(0, -2) + f(0.1, -2)] \\ &= -2 + 0.05 \left[0 + \frac{2(0.1)(-2+1)}{-2} \right] \\ &= -2 + 0.05 \left[\frac{(0.2)(-1)}{-2} \right] \\ &= -2 + 0.05 [0.1] \\ &= -2 + 0.005 \\ &= -1.995 \end{aligned}$$

مثال(2):- استخدم صيغة اويلر المتطورة لاستخراج $y(0.5)$ في المعادلة التفاضلية

$$y' = x + y$$

$$y(0)=1, h=0.1$$

علما ان :

$$y(0.1) = 1 + 0.1(1) = 1.1$$

الحل:-

$$y(0.1)$$

$$y(0.1) \text{ المصححة } = 1 + 0.05(1 + 1.1) = 1.105$$

$$y(0.2) \text{ التضمينية } = 1.105 + 0.1(1.205) = 1.2255$$

$$y(0.2) \text{ المصححة } = 1.105 + 0.05(1.205 + 1.3255) = 1.231525$$

$$y(0.2)$$

$$\text{التضمينية} = 1.231525 + 0.1(1.431525) = 1.374775$$

y(0.3)

$$= 1.231525 + 0.05(1.431525 + 1.6746775) = 1.386851$$

y(0.3) المصححة

$$y(0.4) \text{ التضمينية} = 1.388886835 + 0.1(1.6868351) = 1.5555186$$

Y(0.4)

$$1.388886835 + 0.05$$

$$\text{المصححة} = (1.6868351 + 1.95555186) = 1.5689527$$

$$\text{التضمينية} = 1.5689527 + 0.1(1.9689527) = 1.7658479$$

y(0.5)

Y(0.5)

$$\text{المصححة} = 1.5689527 + 0.05 (1.9689527 + 2.2658479) = 1.7806927$$