- مذكورة. مثلا " الخط الذي يمر بنقطة داخل دائـرة ، يجـب ان يقطـع الـدائرة ". استخدمها اقليدس كفرضية مخفية وضحت بالرسم.

<u>مبرهنة ٤ :</u>

اذا تساوى ضلعان والزاوية المحصورة بينهما من مثلث ضلعين والزاوية المحصورة بينهما من مثلث اخر ، على التناظر ، فانه يتساوى المثلثان و تتساوى الزوايا المتناظرة والضلع من احدهما نظيره من الاخر.

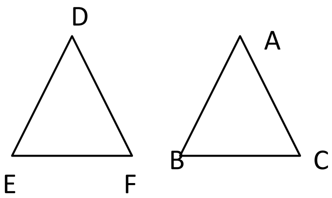
المفروض: $\triangle$ABC, $\triangle$DEF فيهما

, AB=DE, AC=DF $\angle A = \angle D$.

م. $\triangle$ABC $\equiv$. $\triangle$DEF

البرهان:

نضع المثلث ABC على المثلث DEF بحيث ان الراس A يقع على الراس D ، الضلع AB ينطبق على الضلع DE .



بما ان AB=DE ، فان النقطة B تقع على E .

بما ان $\angle A = \angle D$ ، فان الضلع AC يقع على الضلع DF .

وبما ان AC=DF ، فان الراس C يقع على الراس F ،لذلك ، فان

BC=EF ، $\angle C = \angle F, \angle B = \angle E$.

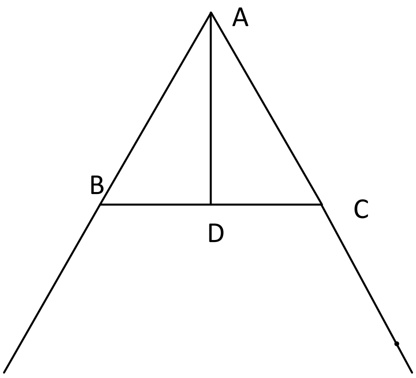
الخطأ في البرهان :

- استعمل اقليدس في برهانه طريقة نقل الاشكال كطريقة للبرهان. ولكن تحريك مثلث غير ممكن فيزياويا (اذ لايمكن بقاءالاشكال على حالها بدون تغير).

__مبرهنة ٥:__

في المثلث المتساوي الساقين تتساوى زوايا القاعدة واذا مد الضلعان المتساويان فالزاويتان الواقعتان تحت القاعدة تتساويان ايضا.

البرهان:



ليكن ABC مثلث ، وفيه AB=AC .

م. اثبات ان $\angle C = \angle B$.

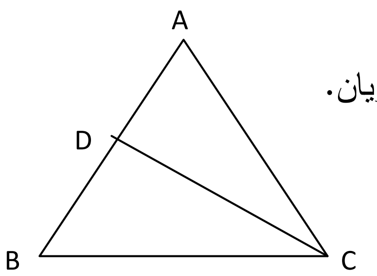
من نقطة A نرسم منصف يقطع الضلع BC في نقطة D .

من مبرهنة ٤ : يتساوى △△ ADC وABD ، لذا تتساوى ∠B و∠C .

الخطأ في البرهان :

- فرض اقليدس ان المنصف لزاوية موجود ويكون وحيدا.
- فرض ايضا ان منصف زاوية او(المستقيم المرسوم) من احد رؤوس المثلث يقطع الضلع المقابل .

__مبرهنة ٦:__



اذا تساوت زاويتان في مثلث ، فالضلعان المقابلان لهما متساويان.

البرهان:

ليكن ABC مثلث ، وفيه $\angle ABC = \angle ACB$.

م. AB=AC .

لو نفرض ان $AB \neq AC$

فان احدهما اكبرمن الاخر ، ليكن AB>AC .

نختار النقطة D على الخط AB بحيث ان BD=AC .

حسب بديهية ١: يوجد المستقيم DC .

بما ان AC=DB و BC مشترك △△ ABC وDCB .

$\angle ACB = \angle DBC$ ،

من مبرهنة ٤ : AB=DC ، و △ABC=△DCB .

أي نحصل على ان المثلث الاكبر يساوي الاصغر ، تناقض.

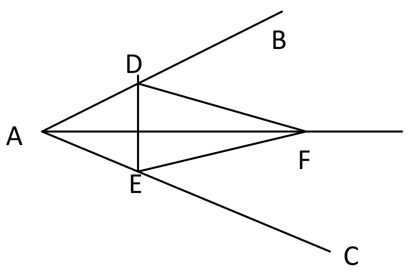
اذن AB=AC .

الخطأ في البرهان:

- البرهان تم عن طريق التناقض . ولكنه لم يحدد اين التناقض بالضبط ؟ استنتج ان المثلث الاكبر يساوي الاصغر ، ولم يشر الى المساحة بل اعتمد على الرسم .

تعريف الزاوية: " ميلان احد مستقيمين متقاطعين عن الاخر".

ملاحظة: لم يعطي اقليدس معنى الميلان للمستقيم.



مبرهنة ٩:

كيفية تنصيف زاوية.

العمل والبرهان:

لتكن BAC زاوية و D نقطة تقع على الضلع AB .

من مبرهنة ٣ (من اكبر مستقيمين معلومين كيفية قطع جزء يساوي اصغر المستقيمين):

توجد نقطة E على الضلع AC بحيث ان AD=AE .

من مبرهنة ١ : يوجد مثلث متساوي الاضلاع EDF .

في △△ AEF وADF (AE=AD, EF=DF وAF مشترك)،

AF ينصف $\angle BAC$ (من مبرهنة ٨ " اذا ساوى ضلعان في مثلث ضلعي اخر على التوالي وتساوت قاعدتهما تساوت زواياهما على التناظر") ، يتساوى △△ AEF وADF ،

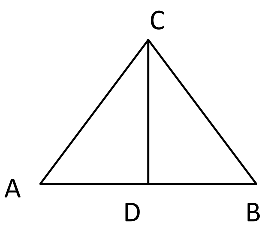
وبذلك ، فان $\angle FAD = \angle FAE$

وهذا يؤدي الى ان $\angle BAF = \angle CAF$

الخطأ في البرهان:

- اعتمد اقليدس في هذا البرهان على الرسم ، اذ كيف برهن ان AF يقـع فـي داخـل الزاوية.

<u>مبرهنة ١٠ :</u>



كيفية تنصيف قطعة.

العمل والبرهان:

لتكن AB قطعة مستقيم .

من مبرهنة ١ : يوجد مثلث متساوي الاضلاع ABC .

من مبرهنة ٩ : تنصف الزاوية ACB .

لتكن D نقطة تقاطع هذا المنصف مع الضلع AB .

من مبرهنة ٤ : يتساوى △△ ACD و BCD ،

من ذلك نستنتج ان AD = DB .

الخطأ في البرهان:

- افترض ان المنصف للزاوية يقطع الضلع المقابل في نقطة D من المحتمل ان تكون غير موجودة (بدون برهان).
- استخدم مفهوم البينية (نقطة بين نقطتين) بدون ان يتطرق اليه.

<u>مبرهنة ١٦:</u>

اذا مد احد اضلاع مثلث فالزاوية الخارجية تكون اكبر من أي من الزاويتين الداخليتين المقابلتين لها.

البرهان:

ليكن ABC مثلث ، وليكن احد اضلاعه BC يمد الى D .

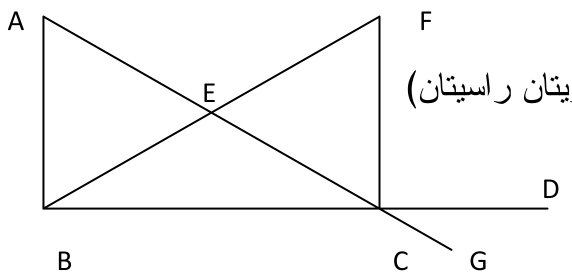
م. يجب برهان ان الزاوية الخارجية ACD اكبر من أي الزاويتين الداخليتين المقابلتين لها BAC و ABC .

لتكن E منتصف AC (كما في الرسم).

بعد ايصال BE يمد بخط مستقيم الى F بحيث ان BE= EF ،

من بديهية ١ : نصل C و F ،

من بديهية ٢ : نمد AC الى G .



بما ان AE=EC ، BE=EF و $\angle AEB = \angle FEC$ (زاويتان راسيتان)

لذلك AB=CF و △AEB=△CEF ،

كذلك $\angle BAE = \angle EFC$ و $\angle ECF = EBA$

لذلك $\angle BAE = \angle ECF$

لكن $\angle ECD > \angle ECF$ ، لذلك $\angle ACD > \angle BAE$

بنفس الطريقة ، اذا نصف BC ، $\angle BCG = \angle ACD$ ،

يمكن ان تبرهن : $\angle BCG > \angle ABC$.

الخطأ في البرهان:

- مد قطعة المستقيم من جهتيها بغير حد ، لايؤدي الى ان طول المستقيم غير منته .
- استعمل اقليدس مصطلحات غير محدود كمفهوم الامتداد ، بينما غير محدود تتسجم مع المستقيم المنته في الطول والغير منته.
- كيف عرف اقليدس ان F تقع في داخل $\angle ACD$ ومنه استنتج ان $\angle ACF < ACD$
- اهمال مفهوم البينية (نقطة بين نقطتين اخريتين، شعاع بين شعاعين اخرين ، الذي من خلاله نعرف زاوية اصغر من اخرى).
- لم يعرف مفاهيم مثل داخل أو خارج ، جهة مستقيم.

<u>نتيجة:</u>

كل المثلثات تكون متساوية الساقين .

البرهان:H.W

ملاحظة :ان اية محاولة لاكمال البرهان من بديهيات ومبرهنات اقليدس سوف تكون فاشلة . كما ان اقليدس لم يتطرق الى مفاهيم مثل " البينية" " داخل" ، او " خارج" في نظامه ، ولايمكن البرهنة على ان المستقيم لايمكن ان يقطع كل اضلاع مثلث .

من البديهيات الضمنية ، هي بديهية الاستمرارية لديديكانيد.

<u>بديهية ديديكانيد :</u>

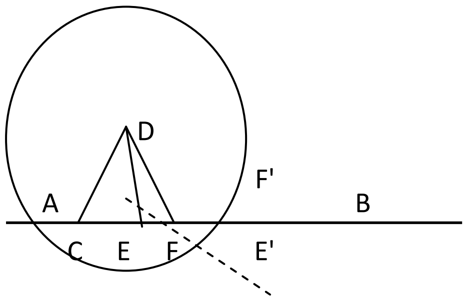
اذا وقعت كل نقاط مستقيم في صنفين بحيث ان كل نقطة من الصنف الاول تقع على يسار كل نقطة من الصنف الثاني ، فعندئذ توجد نقطة واحدة فقط تفصل بين الصنفين وتقسم المستقيم الى صنفين.

استخدم اقليدس هذه البديهية في برهان التالي:

مبرهنة:

المستقيم الواصل بين نقطة داخل دائرة ونقطة خارجها له نقطة مشتركة مع الدائرة.

البرهان:



ليكن D مركز الدائرة ،

r نصف قطرها ،

A نقطة داخل الدائرة ،

B نقطة خارجها .

يكون $AD < r < BD$

نرسم DC عموديا على AB او امتداده.

فيكون $CD < AD < r$.

نقسم نقاط AB الى صنفين :

الاول مجموعة النقاط X التي تحقق $XD < r$.

الثاني مجموعة النقاط Y التي تحقق $r \geq YD$.

لذلك $XD < YD$، ،

وبالتالي نحصل على $CX < CY$.

لذا فان كل نقطة X تسبق كل نقطة Y ،

من بديهية ديديكانيه : توجد نقطة E من القطعة AB بحيث ان كل النقاط التي تسبق E تنتمي الى صنف واحد وكل النقاط التي تتبع E تنتمي الى صنف اخر.

اذن يجب ان نبرهن ان E تقع على محيط الدائرة.

اذا لم تكن E على محيط الدائرة، فاما تكون داخل الدائرة او خارجها .

<u>نفرض ان E داخل الدائرة:</u>

$ED < r$.

نختار نقطة F ، بحيث $F \in AB$ و

B بحيث $EF < r - DE$ ١

في $\triangle DEF$

$DF < DE + EF$ ٢

من ١ و ٢ نحصل :

$DF < r$ ، وبهذا فان F تقع في داخل الدائرة الى يسار E ، تناقض (لان F تقع على يمين E وتتصف بخاصية النقاط التي تقع الى يسار E ، أي انه تقع F داخل الدائرة و $DE < DF$).

لذلك لايمكن ان تقع E داخل الدائرة (E لاتفصل بين الصنفين).

<u>نفرض ان E خارج الدائرة: (في الرسم اعلاه تكون 'E)</u>

$DE' > r$.

نفرض وجود 'F ، بحيث $F' \in AB$ وكذلك 'F بين A و 'E بحيث،

$E'F' < DE' - r$ ٣

في $\triangle DE'F'$

$DF' + F'E' > DE'$ ٤

من ٣ و ٤ نحصل:

$DF' > r$ ، تناقض (لانه وجدنا نقطة الى يسار 'E وتتصف بخواص النقاط الواقعـــة علـــى المستقيم AB الى يمين 'E ، أي ان 'E غير فاصلة للصنفين او المجموعتين).

لذلك يجب ان تقع E على محيط الدائرة.