

# الفصل الثالث

## نقد اقليدس

- نقدم في هذا الفصل التعاريف والبديهيات التي ذكرها اقليدس في كتابه "الاصول" والتي استنتج منها مبرهناته.
- سنعطي دراسة انتقادية للنظام البدهي لاقليدس " الهندسة المستوية الاقليدية".
- العيوب في طرق براهين اقليدس لمبرهناته ، و طرق تحسينها.
- سنذكر النواقص من البديهيات التي استخدمت بدون ان يذكر أي نص لها.

اعطى اقليدس "ثلاثة وعشرين" تعريفا ، " عشر " فرضيات و " ثمان واربعين" مبرهنة مع براهينها.

### ♠ التعاريف:

- ✚ النقطة هي التي ليست لها ابعاد.
- ✚ المستقيم هو طول بدون عرض.
- ✚ نهايات المستقيم هي نقاط.
- ✚ الخط المستقيم هو الخط الذي يقع كليا على نقاطه.
- ✚ السطح هو الذي له طول وعرض فقط.
- ✚ نهايات السطح هي خطوط.
- ✚ السطح المستوي هو ذلك السطح الذي يقع كليا على مستقيماته.
- ✚ حدود الشيء اطرافه.
- ✚ الزاوية الحادة هي الزاوية التي تكون اصغر من قائمة.
- ✚ الشكل هو كل مايكون ضمن حدود.
- ✚ الدائرة: هي شكل مستوي محاط بخط ، بحيث ان كل اجزاء المستقيمات الواقعة على الخط من نقطة واحدة مشتركة داخل الشكل ، تكون متساوية فيما بينها. والنقطة تدعى مركز الدائرة.
- ✚ قطر الدائرة هو أي مستقيم مرسوم من المركز ومنته في الاتجاهين بمحيط الدائرة ، وهذا الخط المستقيم ينصف الدائرة.



➤ نصف الدائرة هو الشكل المحاط بالقطر والمحيط المقطوع به ، ومركز نصف الدائرة هو مركز الدائرة نفسه.

➤ من الاشكال الرباعية المربع ، الذي تكون اضلاعه متساوية وزواياه قوائم ، والمستطيل الذي زواياه قوائم واضلاعه غير متساوية والمعين الذي اضلاعه متساوية وزواياه ليست قوائم وشبه المعين الذي فيه زواياه المتقابلة متساوية واضلاعه المتقابلة متساوية ولكن ليس متساوي الاضلاع ولاقائم الزوايا . والاشكال الرباعية الاخرى من غير هذه تدعى منحرفة.

➤ الاشكال المضلعة هي الاشكال المحاطة بخطوط مستقيمة والشكل الثلاثي محاط بثلاثة مستقيمت . والشكل الرباعي باربعة مستقيمت ، والمضلع ماكان محاط باكثر من اربعة مستقيمت.

➤ من الاشكال الثلاثية ، المثلث المتساوي الاضلاع وهو الذي تكون اضلاعه الثلاثة متساوية. والمثلث المتساوي الساقين فيه ضلعين فقط متساويين، والمثلث المختلف الاضلاع هو الذي تكون اضلاعه مختلفة. وايضا من الاشكال الثلاثية ، المثلث القائم الزاوية الذي فيه زاوية قائمة واحدة. والمثلث المنفرج الزاوية الذي فيه زاوية منفرجة واحدة. والمثلث الحاد الزوايا هو الذي تكون زواياه الثلاثة حادة.

➤ الزاوية المستوية هي ميلان احد مستقيمين متقاطعين عن الاخر في مستوي ولايقعان على مستقيم واحد.

➤ عندما يكون المستقيمان المكونان للزاوية على استقامة واحدة تسمى تلك الزاوية بالزاوية المستقيمة.

➤ عندما يقطع مستقيم مستقيما اخر ويصنع زاويتين متجاورتين متساويتين ، فان كلا من الزاويتين المتساويتين تسمى قائمة والمستقيم المرسوم يسمى عمودا على الاخر.

➤ الزاوية المنفرجة هي الزاوية التي تكون اكبر من قائمة.

➤ الخطوط المستقيمة المتوازية هي الخطوط المستقيمة التي تقع في مستوي واحد والتي لا تلتقي مهما امتدت في أي الاتجاهين.

♠ الفرضيات:

قسم اقليدس الفرضيات الى مجموعتين سمى المجموعة الاولى " مفاهيم عامة " والمجموعة الثانية " البديهيات " او " الفرضيات".

♣♣ مفاهيم عامة Common Notions

❖ الاشياء المساوية لشيء واحد متساوية فيما بينها.



- ❖ إذا اضيفت كميات متساوية الى اخرى متساوية تكون النتائج متساوية.
- ❖ إذا طرحت كميات متساوية من اخرى متساوية تكون النتائج متساوية.
- ❖ الاشياء المتطابقة متساوية فيما بينها.
- ❖ الكل اكبر من الجزء.

#### ♣♣ البديهيات Postulates

- (١) من الممكن رسم خط مستقيم من أي نقطة الى أي نقطة.
- (٢) يمكن مد قطعة المستقيم من جهتيها الى غير حد.
- (٣) يمكن رسم دائرة اذا علم مركزها ونصف قطرها.
- (٤) جميع الزوايا القوائم متساوية.
- (٥) اذا قطع مستقيمان بمستقيم ثالث بحيث كان مجموع الزاويتين الداخليتين الواقعتين على جهة واحدة من القاطع اقل من قائمتين ، فان المستقيمين ، اذا مدا بغير حد ، يتلاقيان في تلك الجهة من القاطع التي يكون فيها مجموع الزاويتين اقل من قائمتين.

#### ❁ ملاحظة ❁

تعتبر البديهية الخامسة نقطة البداية في دراسة الهندسة اللاقليدية ، حيث نجد ان اقليدس برهن اول ٢٨ مبرهنة دون ان يستعمل البديهية الخامسة ، مما اثار انتباه العلماء الذين اتوا بعد اقليدس ، مما جعل قسما منهم يعتقد ان البديهية الخامسة يجب ان تكون مبرهنة ولذا يجب ان تبرهن.

#### ♠ المبرهنات:

- كيفية رسم مثلث متساوي الاضلاع على مستقيم معلوم ومنته في الطول.
- كيفية رسم مستقيم من نقطة معلومة طوله يساوي طول مستقيم معلوم.
- من اكبر مستقيمين معلومين كيفية قطع جزء يساوي اصغر المستقيمين.
- اذا تساوى ضلعان والزاوية المحصورة بينهما من مثلث ضلعين والزاوية المحصورة بينهما من مثلث اخر ، على التناظر ، فانه يتساوى المثلثان و تتساوى الزوايا المتناظرة والضلع من احدهما نظيره من الاخر.
- في المثلث المتساوي الساقين تتساوى زوايا القاعدة واذا مد الضلعان المتساويان فالزاويتان الواقعتان تحت القاعدة تتساويان ايضا.
- اذا تساوت زاويتان في مثلث فالضلعان المقابلان لهما متساويان.
- كيفية تصنيف زاوية مستوية.
- كيفية تصنيف مستقيم معلوم طوله منته.



- كيفية رسم مستقيم عمود على مستقيم معلوم من نقطة خارجة عنه.
- اذا رسم مستقيمان من طرفي مستقيم معلوم وتلاقيا في نقطة ، فانه لايمكن رسم مستقيمين اخرين يساويا ان المستقيمين على التناظر وفي طرفي المستقيم المعلوم نفسه ومتلاقيان في نقطة اخرى في الجهة نفسها من المستقيم المعلوم.
- اذا ساوى ضلعان في مثلث ضلعي اخر على التوالي وتساوت قاعدتهما تساوت زواياهما على التناظر .
- كيفية اقامة عمود على مستقيم معلوم من نقطة مفروضة عليه.
- اذا لاقى مستقيم مستقيما معلوما ، فانه يصنع اما زاويتين قائمتين او زاويتين مجموعهما يساوي زاويتين قائمتين.
- اذا رسم من نقطة معلومة على مستقيم معلوم مستقيمان وعلى جهتيه المختلفتين وكان مجموع الزاويتين المتجاورتين يساوي زاويتين قائمتين فالمستقيمان يقعان على مستقيم واحد.
- اذا تقاطع مستقيمان فالزاويتان المقابلتان بالراس متساويتان.
- اذا مد احد اضلاع مثلث فالزاوية الخارجية تكون اكبر من كل الزاويتين الداخليتين المقابلتين لهما.
- مجموع زاويتان في مثلث كيفما اتخذت اقل من زاويتين قائمتين.
- في أي مثلث يكون اكبر الاضلاع مقابلا لأكبر الزوايا.
- في أي مثلث تكون الزاوية الكبرى مقابلة لأكبر الاضلاع.
- مجموع أي ضلعين في مثلث اكبر من ضلعه الثالث .
- اذا رسم من طرفي قاعدة مثلث ، مستقيمان وتلاقيا في نقطة داخل المثلث فالمستقيمان اصغر من ضلعي المثلث ، ويحصران زاوية اكبر من الزاوية المحصورة بين ضلعي المثلث.
- كيفية رسم مثلث اضلاعه تساوي ثلاثة مستقيمت معلومة. ومن الضروري ان يكون مجموع أي زوج من المستقيمت اكبر من المستقيم الثالث.
- من نقطة على مستقيم معلوم ، كيفية رسم زاوية مستقيمة تساوي زاوية معلومة.
- اذا ساوى ضلعان في مثلث ، ضلعين في مثلث اخر، على التوالي. وكانت الزاوية المحصورة بين الضلعين في المثلث الاول اكبر من نظيرتها في المثلث الثاني ، فان الضلع الثالث في المثلث الاول اكبر من الضلع الثالث في المثلث الثاني.
- اذا ساوى ضلعا مثلث ضلعي مثلث اخر، على التوالي . وكان الضلع الثالث في المثلث الاول اكبر من الضلع الثالث في المثلث الثاني ، فالزاوية المحصورة بين



- اذا ساوت زاويتان وضلع من مثلث زاويتين وضلعا مناظرا من مثلث اخر، على التوالي ، فالضلعان الاخران والزاوية الثالثة في المثلث الاول تساوي الضلعين الاخرين والزاوية الثالثة في المثلث الثاني.
- اذا قطع مستقيم مستقيمين وكانت الزاويتان المتبادلتان متساويتين يكون المستقيمان متوازيين.
- اذا قطع مستقيم مستقيمين وكانت الزاوية الخارجية تساوي الزاوية الداخلية والمقابلة لها في نفس الجهة من القاطع ، او كان مجموع الزاويتين الداخليتين الواقعتين على جهة واحدة من القاطع يساوي قائمتين ، يكون المستقيمان متوازيين.
- اذا قطع مستقيمان متوازيان بقاطع ، فان الزاويتين الداخليتين المتبادلتين متساويتان والزاوية الخارجية تساوي الزاوية الداخلية المقابلة لها وكذلك مجموع الزاويتين الداخليتين الواقعتين على جهة واحدة من القاطع يساوي قائمتين.
- المستقيمت الموازية لمستقيم واحد تكون متوازية فيما بينها.
- يمكن رسم موازي لمستقيم من نقطة خارجة عنه.
- اذا مد احد اضلاع مثلث ، فالزاوية الخارجية تساوي مجموع الزاويتين الداخليتين المقابلتين لها ويكون مجموع الزوايا الثلاث للمثلث قائمتين.
- .
- .
- .
- اذا كان المربع المنشأ على احد اضلاع مثلث يساوي مجموع المربعين المنشأين على الضلعين الاخرين، فان المثلث يكون قائم الزاوية.

## بعض مواطن الضعف في نظام اقليدس :

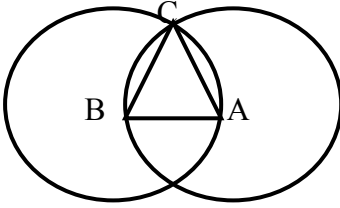
١. خلو النظام البدهي لاقليدس من الكلمات الاولية ، حيث ان اقليدس يعرف النقطة بانها لابعد لها والمستقيم هو طول بدون عرض . فما هو البعد والطول والعرضاي ان اقليدس يعرف الكلمات بكلمات اصعب منها.
٢. لقد استخدم اقليدس بديهيات لم يشير اليها في نظامه لذلك سميت ببديهيات و فرضيات ضمنية ضمنية .



- أ- فرضية الاستمرارية.  
 ب-بديهية باخ.  
 ت-بديهيات البينية.  
 ث-وحدانية المستقيم.  
 ج- لانهاية المستقيم.  
 ح-بديهيات الترتيب الخطية.

٣. يستعمل اقليدس كلمة يساوي بينما في الانظمة الحديثة يعني تطابق ، فمثلا ، عندما يقال زاويتان متساويتان ، نقول بانهما متطابقتان.  
 ٤. اعتمد على الرسم لبرهان مبرهناته وليس مجرد توضيح البرهان.  
 ٥. ان بديهيات اقليدس ليست كاملة . أي اننا نستطيع اضافة بديهيات جديدة الى بديهيات اقليدس . والدليل على ان مجموعة بديهيات اقليدس غير كاملة العبارة التالية : "الخط الذي يصل بين نقطة داخل دائرة ونقطة خارجها يقطع الدائرة". هذه العبارة لايمكن برهنتها او دحضها . والسبب الاساسي هو عدم اعطاء بديهية الاستمرارية.

### بعض مبرهنات اقليدس



#### مبرهنة ١ :

كيفية رسم مثلث متساوي الاضلاع على مستقيم معلوم ومنته في الطول.  
 بتعبير اخر: لاي قطعة يوجد مثلث متساوي الاضلاع له القطعة كضلع.

العمل والبرهان:

لتكن AB قطعة.

من بديهية ٣ : توجد دائرة مركزها A ونصف قطرها AB، وكذلك توجد دائرة مركزها B ونصف قطرها AB

تتقاطع الدائرتين في نقطة ولتكن C .

من بديهية ١ : توجد القطعتان BC و AC .

من تعريف الدائرة :  $BC=AB$  و  $AC=AB$

$$AB=BC=AC$$

لذلك



وبهذا يكون المثلث ABC متساوي الاضلاع.

- النقد الموجه لافليدس في برهان هذه المبرهنة ، بعبارة ادق ( خطأ افليدس في البرهان )
- لم يبين افليدس ان النقطة C موجودة ، حيث انه لا توجد بديهية عن تقاطع دائرتين ، وحتى لو فرضنا وجود النقطة C ، فمن المحتمل وقوعها على المستقيم AB ، وبهذه الحالة لا يوجد المثلث ABC .
  - من بديهية رقم ١ : لكل نقطتين مختلفتين ، توجد قطعة مستقيم تصل بينهما ، لم يذكر افليدس شيئا عن وحدانية القطعة.
  - ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة تكون مثلثا واحدا فقط (هذا لا يمكن برهانه من بديهيات افليدس).

### مبرهنة ٢ :

كيفية رسم مستقيم من نقطة معلومة طوله يساوي طول مستقيم معلوم.  
العمل والبرهان:

لتكن A نقطة معلومة و BC مستقيما معلوما .

- م. رسم مستقيم يمر من A طوله يساوي المستقيم BC .
- من بديهية ١ : يوجد مستقيم AB بين النقطتين A و B .
- من مبرهنة ١ : يرسم مثلث متساوي الاضلاع DAB .

- من بديهية ٢ : تمد قطعة المستقيم AD الى نقطة E وكذلك قطعة المستقيم BD الى نقطة F .
- من بديهية ٣ : يرسم دائرة مركزها B ونصف قطرها BC ولتكن الدائرة HGC وكذلك يرسم دائرة مركزها D ونصف قطرها DG ولتكن GKL .

بما ان B مركز الدائرة HGC ، فان  $BC=BG$  .

بما ان D مركز الدائرة GKL ، فان  $DG=DL$  .

بما ان  $DB=DA$  ، فان  $AL=BG$  (مفاهيم عامة - ٣) .

وبما ان  $BC=BG$  ، فان  $AL=BG=BC$  (مفاهيم عامة - ١) .

أي ان  $AL=BC$  .

لذلك ، من نقطة معلومة A ، رسم خطا مستقيما AL طوله يساوي طول مستقيم معلوم.

الخطأ أو الخلل في البرهان:

- كل العبارات في البرهان نتجت من بديهيات افليدس ، مفاهيم عامة ، تعاريف ، مبرهنة ١. الخلل لا يقع في العبارات التي استخدمت ولكن استخدمت فرضيات غير

