جبر الفضاءات الجزئية :---: ALGEBRA OF SUBSPACE

اذا كان كل من M_1, M_2 فضاءاً جزئياً من فضاء المتجهات V على الحقل F فأن :-

$$M_1 \cup M_2 = \{A \in V : A \in M_1 \vee A \in M_2\}$$

$$M_1 \cap M_2 = \{A \in V : A \in M_1 \wedge A \in M_2\}$$

مبرهنة :- اذا كان كل من M_1 , M_2 فضاءاً جزئياً من فضاء المتجهات v يكون $M_1 \cap M_2$ فضاءاً جزئياً .

البرهان:- نفرض A , B أي متجهين في $M_1 \cap M_2$ و k عدد قياسي من الحقل F.

$$\Rightarrow A \in M_1 \cap M_2 \quad \& \ B \in M_1 \cap M_2$$
$$\Rightarrow A \in M_1 \quad \& \ A \in M_2$$

$$\Rightarrow B \in M_1 \quad \& \ B \in M_2$$

$\therefore$ M_2 و M_1 فضاءات جزئية فأن

$$A + B \in M_1 \quad \& \ A + B \in M_2$$
$$\Rightarrow A + B \in M_1 \ \cap M_2$$
$$kA\epsilon M_1 \ \& \ kA\epsilon M_2$$

(لان M_2 و M_1 فضاءان جزئيان)

$$\Rightarrow kA\epsilon M_1 \cap M_2$$

$\therefore$ $M_1 \cap M_2$ فضاءاً جزئياً من الفضاء V

ملاحظة :- ليس من الضروري ان يتحقق $M_1 \cup M_2$ فضاء جزئي دائماً

مثال :- في الفضاء R^2 على الحقل

$$M_1 = \{(x,y): x + 2y = 0\}, M_2 = \{(x,y): 5x + y = 0\}$$

هل ان $M_1 \cup M_2$ فضاء جزئي من الفضاء R^2 ؟

البرهان:-

١- M_2 و M_1 فضاء جزئي R^2. (واجب)

٢- نفرض ان $B = (-1,5) \in M_2, A = (2,-1) \in M_1$

$$\Rightarrow A \in M_1 \cup M_2 \quad \& \; B \in M_1 \cup M_2$$
$$A + B = (1,4) \Rightarrow A + B \notin M_1 \; \& \; A + B \notin M_2$$

$\therefore$ $M_1 \cup M_2$ ليست مغلقة تحت عملية الجمع

$\therefore$ $M_1 \cup M_2$ ليست فضاءاً جزئياً من فضاء المتجهات R^2

****

مبرهنة :- اذا كان كل من M_2 و M_1 فضاءاً جزئي من فضاء المتجهات V على الحقل F فان $M_1 \cup M_2$ يكون فضاءاً جزئياً اذا و فقط اذا كان $M_1 < M_2$ او $M_2 < M_1$

البرهان:- نفرض ان $M_1 \cup M_2$ فضاءاً جزئياً من V و نفرض $M_1 \not\subset M_2$

$$\exists A \notin M_1 \quad \& \; A \notin M_2$$

$$\exists B \notin M_1 \quad \& \; B \notin M_2$$

$$\therefore \; A \in M_1 \cup M_2 \quad \& \;\; B \in M_1 \cup M_2$$

$\because$ $M_1 \cup M_2$ فضاء جزئي فأن :-

$$A + B = C \in M_1 \cup M_2$$

$$\Longrightarrow A = C - B - - - - -(1)$$
$$B = C - A - - - - -(2)$$

فاذا كان $C\epsilon M_1$ فأن من (2) $B\epsilon M_1$ و هذا غير ممكن

اما اذا كان $C\epsilon M_2$ فأن من (1) $A\epsilon M_2$ و هذا غير ممكن

$\therefore C \notin M_1 \quad \& \, C \notin M_2$

$\Longrightarrow C \notin M_1 \cup M_2$

$\therefore M_1 \cup M_2$ ليستفضاءاً جزئياً و هذا تناقضاً .

و بالاتجاه المعاكس

نفرض $M_1 < M_2$ او $M_2 < M_1$

فأن $M_1 \cup M_2 = M_2$, $M_1 \cup M_2 = M_1$

و أي من الحالتين يكون $M_1 \cup M_2$ فضاء جزئي

مثال :- احسب تقاطع الفضائين الجزئيين

$$M_1 = \{(x,y,z): 2x - y + 3z = 0\}$$

$$M_2 = \{(x,y,z): x + y - z = 0\}$$

و ذلك في الفضاء R^3 على الحقل F .

الحل :- نفرض $(x,y,z) = A \in M_1 \cap M_2$

$$2x - y + 3z = 0 - - - - - - (1)$$
$$x + y - z = 0 - - - - - - (1)$$

بضرب المعادلة رقم (2) بـــ (-2) و جمعهما مع المعادلة (1) نحصل على

أي ان $-3y + 5z = 0$

$y = \left({}^{5}/_{3}\right) z$ نعوض في معادلة رقم (1) فنحصل على z $x = \left({}^{-2}/_{3}\right)$

ينتج من المعادلتين

$$z = z \;,\; y = \left({}^{5}/_{3}\right) z \;, x = \left({}^{-2}/_{3}\right) z$$

$$\therefore M_1 \cap M_2 = \left\{(x, y, z): x = \left({}^{-2}/_{3}\right) z \,, y = \left({}^{5}/_{3}\right) z \,, z = z\right\}$$

مثال :- في الفضاء $P_2(R)$ على الحقل R . احسب التقاطع $M \cap N$ اذا علمت ان:-

$$M = \{a + bx + cx^2 : a + 2b - c = 0\}$$

$$N = \{a + bx + cx^2 : b = 0, a + 3c = 0\}$$