الأنحلال degeneracy

نحن نعلم سابقاً أن المؤثر $\hat{Q}$ إذا دخل على الدالة موجية ψ_n فإنها يعطي القيمة الذاتية q و كما يلي :

$$\hat{Q}\psi_n = q\psi_n \quad \Longrightarrow \quad example \quad \Longrightarrow \quad \hat{E}\psi_n = E\psi_n$$

كذلك فإن مؤثر الطاقة الكلية $\hat{E}$ يعطي القيمة الذاتية للطاقة الكلية وهي E ، و أذا دخل مؤثر الطاقة الكلية $\hat{E}$ على مجموعة من الدوال الموجية و أعطى نفس القيم الذاتية لكل الدوال فإن هذه الدوال الموجية تنتمي الى مستوي طاقة واحد .

مثـــــال إذا كانت المعادلة العامة للطاقة الكلية في أحد الأنظمة الفيزيائية هي $E_n = (n+1)h\nu$ و كان $n = n_x + n_y$ لتكون معادلة الطاقة $E_{(n_x,n_y)} = (n_x + n_y + 1)h\nu$ فإن مستويات الطاقة و قيمها تكون كما يلي :

n	n_x	n_y	$\boldsymbol{E(h\nu)}$
0	0	0	1
1	1	0	2
	0	1	2
2	2	0	3
	1	1	3
	0	2	3
3	3	0	4
	2	1	4
	1	2	4
	0	3	4
4	4	0	5
	2	2	5
	3	1	5
	1	3	5
	0	4	5

problem 4-1

اذا كانت الدالة الموجية للمتذبذب التوافقي للحالة الأرضية تساوي:-

$$\psi(x,t) = Ae^{-(amx^2/\hbar + iat)}$$

أحسب كل ممايأتي:

a- ثابت المعايرة (A)

b- طاقة الوضع(الجهد) $V(x)$

c- $\langle p^2\rangle, \langle p\rangle, \langle x^2\rangle, \langle x\rangle$

d - $\sigma_p\sigma_x$ وهل ذلك يحقق مبدأ للايقين(اللادقة)

$\boxed{a}$

$$\psi(x,t) = Ae^{-amx^2/\hbar}.e^{-iat}$$

$$\Longrightarrow \quad \psi^*(x,t) = Ae^{-amx^2/\hbar}.e^{+iat}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x,t)\,\psi^*(x,t)dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Ae^{-amx^2/\hbar}.e^{-iat}.Ae^{-amx^2/\hbar}.e^{+iat}dx = 1$$

$$A^2\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2amx^2/\hbar}dx = 1 \qquad \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}}$$

$$A^2\sqrt{\frac{\pi}{\frac{2am}{\hbar}}} = 1 \quad \Longrightarrow \quad A = \left(\frac{2am}{\pi\hbar}\right)^{1/4}$$

$\boxed{b}$ By T.D.S.E.

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}+V(x)\,\psi(x,t)=i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}$$

$$V(x)\,\psi(x,t)=i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}+\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}$$

$$V(x)\,\psi(x,t)$$
$$=i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left(Ae^{-amx^2/\hbar}.e^{-iat}\right)$$
$$+\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(Ae^{-amx^2/\hbar}.e^{-iat}\right)$$

$$V(x)\,\psi(x,t)$$
$$=i\hbar(-ia)Ae^{-amx^2/\hbar}.e^{-iat}$$
$$+\frac{\hbar^2}{2m}Ae^{-iat}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-2amx}{\hbar}e^{-amx^2/\hbar}\right)$$

$$=a\hbar Ae^{-amx^2/\hbar}.e^{-iat}$$
$$+\frac{\hbar^2}{2m}Ae^{-iat}\left(\frac{-2am}{\hbar}e^{-amx^2/\hbar}\right.$$
$$\left.+\frac{4a^2m^2x^2}{\hbar^2}e^{-amx^2/\hbar}\right)$$

$$V(x)\,\psi(x,t)$$
$$=a\hbar Ae^{-amx^2/\hbar}.e^{-iat}$$
$$+Ae^{-amx^2/\hbar}.e^{-iat}\left(\frac{-2am}{\hbar}\frac{\hbar^2}{2m}+\frac{4a^2m^2x^2}{\hbar^2}\frac{\hbar^2}{2m}\right)$$

$$V(x)\,\psi(x,t)$$
$$=a\hbar Ae^{-amx^2/\hbar}.e^{-iat}$$
$$+Ae^{-amx^2/\hbar}.e^{-iat}(-a\hbar+2a^2mx^2)$$

$$V(x)\,\psi(x,t) = a\hbar\psi(x,t) + \psi(x,t)(-a\hbar + 2a^2mx^2)$$

$$V(x)\,\psi(x,t) = a\hbar\psi(x,t) - a\hbar\psi(x,t) + 2a^2mx^2\psi(x,t)$$

$$V(x)\,\psi(x,t) = 2a^2mx^2\,\psi(x,t) \quad \Longrightarrow \quad V(x) = 2a^2mx^2$$

$$\boxed{c}\langle x\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x,t)x\,\psi(x,t)dx = A^2\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-2amx^2/\hbar}dx = 0$$

$$\langle x^2\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x,t)x^2\,\psi(x,t)dx$$

$$= A^2\int_{-\infty}^{+\infty} x^2e^{-2amx^2/\hbar}dx$$

$$= A^2\,\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{\pi}}{\left(\frac{2am}{\hbar}\right)^{3/2}} \qquad but \qquad A^2 = \sqrt{\frac{2am}{\pi\hbar}}$$

$$\langle x^2\rangle = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2am}{\pi\hbar}}\sqrt{\frac{\pi\hbar}{2am}}\,\frac{\hbar}{2am} = \frac{\hbar}{4am}$$

$$\langle p\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x,t)\hat{p}\,\psi(x,t)dx$$

$$= A^2\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-amx^2/\hbar}\left[-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{-amx^2/\hbar}\right)\right]dx$$

$$= i\hbar A^2\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-amx^2/\hbar}\left(\frac{2amx}{\hbar}e^{-amx^2/\hbar}\right)dx$$

$$= i2amA^2\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-2amx^2/\hbar}dx = 0$$

$$\langle p^2\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x,t)(\hat{p})^2\, \psi(x,t)dx$$

$$= A^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-amx^2/\hbar}\left[-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(e^{-amx^2/\hbar}\right)\right]dx$$

$$= -\hbar^2 A^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-amx^2/\hbar}\left[\frac{-2am}{\hbar} e^{-amx^2/\hbar} + \frac{4a^2m^2x^2}{\hbar^2} e^{-amx^2/\hbar}\right]dx$$

$$= -\hbar^2 A^2 \frac{-2am}{\hbar}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2amx^2/\hbar}dx - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2amx^2}{\hbar} e^{-2amx^2/\hbar}\, dx\right]$$

$$= -\hbar^2 A^2 \frac{-2am}{\hbar}\left[\frac{1}{A^2} - \frac{2am}{\hbar}\frac{1}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{\left(\frac{2am}{\hbar}\right)^{3/2}}\right]$$

$$= -\hbar^2 A^2 \frac{-2am}{\hbar}\frac{1}{A^2} - \left(-\hbar^2 A^2 \frac{-2am}{\hbar}\frac{2am}{\hbar}\frac{1}{2}\frac{1}{A^2}\frac{\hbar}{2am}\right)$$

$$\langle p^2\rangle = 2am\hbar - am\hbar = am\hbar$$

$\boxed{d}$ $\quad \because\ \langle x\rangle = 0 \qquad \therefore\ \sigma_x = \sqrt{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2} = \sqrt{\langle x^2\rangle}$

$$= \sqrt{\frac{\hbar}{4am}}$$

$$\because \ \langle p\rangle = 0 \qquad \therefore \ \ \sigma_p = \sqrt{\langle p^2\rangle - \langle p\rangle^2} = \sqrt{\langle p^2\rangle} \ = \ \sqrt{am\hbar}$$

$$\Longrightarrow \quad \sigma_x\sigma_p = \sqrt{\frac{\hbar}{4am}}\sqrt{am\hbar} = \sqrt{\frac{am\hbar^2}{4am}} = \sqrt{\frac{\hbar^2}{4}} = \frac{\hbar}{2}$$

إذن هي تحقق مبدأ اللادقة لهايزنبرك.