ثانياً : جدار الجهد potential barrier

$$V(x) = 0 \qquad x < -a$$

$$V(x) = V_0 \qquad -a \leq x \leq a$$

$$V(x) = 0 \qquad x > a$$

الحالة الأولى $E > V_0$

1. في المنطقة الأولى $V(x) = 0$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi_1(x)}{dx^2} + [V(x) - E]\psi_1(x) = 0$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi_1(x)}{dx^2} - E\psi_1(x) = 0$$

$$\frac{d^2\psi_1(x)}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi_1(x) = 0 \quad let \quad k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\psi_1(x) + k^2\psi_1(x) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{d^2}{dx^2} = -k^2 \;\Rightarrow\; \frac{d}{dx} = \pm ik$$

$$\psi_1(x) = Ae^{\text{الجذر الأول}\,x} + Be^{\text{الجذر الثاني}\,x} \;\Rightarrow\; \boxed{\psi_1(x) = Ae^{+ikx} + Be^{-ikx} \quad at\ x < -a}$$

2. في المنطقة الثانية $V(x) = V_0$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi_2(x)}{dx^2} + [V(x) - E]\psi_2(x) = 0$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi_2(x)}{dx^2} + (V_0 - E)\psi_2(x) = 0$$

$$\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi_2(x)}{dx^2} + (E - V_0)\psi_2(x) = 0$$

$$\frac{d^2\psi_2(x)}{dx^2} + \frac{2m(E - V_0)}{\hbar^2}\psi_2(x) = 0 \quad let \quad k'^2 = \frac{2m(E - V_0)}{\hbar^2}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\psi_2(x) + k'^2\psi_2(x) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{d^2}{dx^2} = -k'^2 \;\Rightarrow\; \frac{d}{dx} = \pm ik'$$

$$\psi_2(x) = Ce^{\text{الجذر الأول}\,x} + De^{\text{الجذر الثاني}\,x}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\psi_2(x) = Ce^{+ik'x} + De^{-ik'x} \quad at\ -a \leq\ x \leq a}$$

3. $V(x) = 0$ في المنطقة الثالثة

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi_3(x)}{dx^2} + [V(x) - E]\psi_3(x) = 0$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi_3(x)}{dx^2} - E\psi_3(x) = 0$$

$$\frac{d^2\psi_3(x)}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi_3(x) = 0 \quad let \quad k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\psi_3(x) + k^2\psi_3(x) = 0 \ \Longrightarrow\ \frac{d^2}{dx^2} = -k^2 \ \Longrightarrow\ \frac{d}{dx} = \pm ik$$

$$\psi_3(x) = Ee^{\text{الجذر الأول}\,x} + Fe^{\text{الجذر الثاني}\,x} \ \Longrightarrow\ \psi_3(x) = Ee^{-ikx} + Fe^{+ikx}$$

$$\boxed{\psi_3(x) = Fe^{+ikx} \quad at\ \ x > a}$$

في موضوع جدار الجهد غير مطلوب أستخراج العلاقة بين A, B, C, D, F.

الحالة الثانية $E < V_0$

1. $V(x) = 0$ في المنطقة الأولى

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi_1(x)}{dx^2} + [V(x) - E]\psi_1(x) = 0$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi_1(x)}{dx^2} - E\psi_1(x) = 0$$

$$\frac{d^2\psi_1(x)}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi_1(x) = 0 \quad let \quad k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\psi_1(x) + k^2\psi_1(x) = 0 \;\Longrightarrow\; \frac{d^2}{dx^2} = -k^2 \;\Longrightarrow\; \frac{d}{dx} = \pm ik$$

$$\psi_1(x) = Ae^{\text{الجذر الأول}\,x} + Be^{\text{الجذر الثاني}\,x} \;\Longrightarrow\; \boxed{\psi_1(x) = Ae^{+ikx} + Be^{-ikx} \quad at\ x < -a}$$

2. $V(x) = V_0$ في المنطقة الثانية

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi_2}{dx^2} + [V(x) - E]\psi_2(x) = 0$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi_2(x)}{dx^2} + (V_0 - E)\psi_2(x) = 0 \qquad * -1$$

$$\frac{d^2\psi_2(x)}{dx^2} - \frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}\psi_2(x) = 0 \quad let \quad \alpha^2 = \frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\psi_2(x) - \alpha^2\psi_2(x) = 0 \;\Longrightarrow\; \frac{d^2}{dx^2} = \alpha^2 \;\Longrightarrow\; \frac{d}{dx} = \mp\alpha$$

$$\psi_2(x) = Ce^{\text{الجذر الأول}\,x} + De^{\text{الجذر الثاني}\,x}$$

$$\Longrightarrow\; \boxed{\psi_2(x) = Ce^{-\alpha x} + De^{+\alpha x} \quad at\ -a \le x \le a}$$

3. $V(x) = 0$ في المنطقة الثالثة

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi_3(x)}{dx^2} + [V(x) - E]\psi_3(x) = 0$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi_3(x)}{dx^2} - E\psi_3(x) = 0$$

$$\frac{d^2\psi_3(x)}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi_3(x) = 0 \quad let \quad k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\psi_3(x) + k^2\psi_3(x) = 0 \;\Longrightarrow\; \frac{d^2}{dx^2} = -k^2 \;\Longrightarrow\; \frac{d}{dx} = \pm ik$$

$$\psi_3(x) = Ee^{\text{الجذر الأول}\,x} + Fe^{\text{الجذر الثاني}\,x} \;\Longrightarrow\; \psi_3(x) = Ee^{-ikx} + Fe^{+ikx}$$

لاحظ أن $E = 0$ لأنه لا يوجد موجة منعكسة في هذه المنطقة .

$$\boxed{\psi_3(x) = Fe^{+ikx} \quad at \;\; x > a}$$

ثالثاً : صندوق الجهد (بئر الجهد) potential box

صندوق الجهد يتكون من منطقة واحدة فقط .

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + [V(x) - E]\psi(x) = 0$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} - E\psi(x) = 0 \qquad \boxed{V_0 = 0}$$

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi(x) = 0 \quad let \;\; k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) + k^2\psi(x) = 0 \;\; \Longrightarrow \;\; \frac{d^2}{dx^2} = -k^2 \;\; \Longrightarrow \;\; \frac{d}{dx} = \pm ik$$

$$\psi(x) = Ae^{\text{الجذر الأول}\; x} + Be^{\text{الجذر الثاني}\; x}$$

$$\Longrightarrow \;\; \boxed{\psi(x) = Ae^{+ikx} + Be^{-ikx} \quad at \; 0 < x < a}$$

أن حركة الدالة الموجية في صندوق الجهد تشبه الموجة الواقفة و عليه فإن $\psi(x) = 0$ عندما تكون $x = 0$ و $x = a$.

$$\psi(x) = Ae^{+ikx} + Be^{-ikx}\Big|_{x=0} = 0 \;\; \Longrightarrow \;\; A + B = 0 \;\; \Longrightarrow \;\; B = -A$$

وعليه تكون العادلة الموجية بشكل التالي:

$$\psi(x) = Ae^{+ikx} + Be^{-ikx} \;\; \Longrightarrow \psi(x) = Ae^{+ikx} - Ae^{-ikx}$$

و بستخدام معادلة أويلر :

$$\psi(x) = A(\cos kx + i\sin kx) - A(\cos kx - i\sin kx) = 2iA\sin kx$$

$$let\ \ 2iA = C \ \ \Longrightarrow \ \ \psi(x) = C\sin kx$$

$$\psi(x) = C\sin kx|_{x=a} = 0 \quad But \quad C \neq 0 \ \Longrightarrow \ \sin ka = 0$$

$$\Longrightarrow \ \ ka = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots \ \ , n\pi \quad \therefore ka = n\pi \ \Longrightarrow \ k = \frac{n\pi}{a}$$

$$\psi(x) = C\sin kx \ \Longrightarrow \ \psi(x) = C\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

الآن سوف نطبق شرط المعايرة على الدالة الموجية لإيجاد قيمة ثابت المعايرة C و كما يلي :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)\,\psi^*(x)dx = 1$$

$$\int_0^a C\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)C^*\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)dx = 1$$

$$|C|^2\int_0^a \sin^2\left(\frac{n\pi}{a}x\right)dx = 1$$

$$|C|^2\int_0^a \frac{1-\cos\left(2\frac{n\pi}{a}x\right)}{2}dx = 1$$

$$\frac{|C|^2}{2}\int_0^a dx - \int_0^a \cos\left(2\frac{n\pi}{a}x\right)dx = 1 \qquad \boxed{\int_0^a \cos\left(2\frac{n\pi}{a}x\right)dx = 0}$$

$$\frac{|C|^2}{2}a = 1 \ \Longrightarrow \ C = \sqrt{\frac{2}{a}} \ \Longrightarrow \ \psi(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

و لإيجاد قيمة الزخم الخطي للجسيم في صندوق الجهد نستخدم معادلة دي – برولي :

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{2\pi\hbar}{\lambda} = k\hbar \quad \boxed{\frac{2\pi}{\lambda} = k = \frac{n\pi}{a}} \Longrightarrow p_n = \frac{n\pi}{a}\hbar$$

$$E = T + V = T + 0 = \frac{p^2}{2m} \implies E_n = \frac{\left(\frac{n\pi}{a}\hbar\right)^2}{2m} = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$$

راجع المثال من ملزمة عتبة الجهد .