القيمة المتوقعة (متوسط أو معدل القيمة) Expectation value

من الممكن إيجاد القيمة المتوقعة للكمية الفيزيائية بأستخدام المؤثرات و بالأستعانة بالتكامل كما يلي :

$$\langle x\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \hat{x} \quad \psi \, dx$$

$$\langle p_x\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \hat{p}_x \, \psi \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \left(-i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) \, dx$$

$$\langle p_x^2\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \hat{p}_x^2 \, \psi \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \left(-\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\right) \, dx$$

$$\langle E\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \hat{E} \, \psi \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \left(i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}\right) \, dx$$

وهكذا بقية المؤثرات .

مثـــــــال جد القيمة المتوقعة للطاقة الحركية لجسيم دالته الموجية هي :

$$\psi(x) = A e^{-\beta x}$$

إذا علمت أن A ثابت حقيقي .

ملاحظة إذا جاء في السؤال أن (A هي ثابت حقيقي) فإن مرافقها هو A نفسها و إذا جاء في السؤال (A هي ثابت فقط) فإن مرافقها هو A^* و لا ننسى أن $A\,A^* = |A|^2$.

الحــــــل

$$\psi(x) = A e^{-\beta x} \implies \psi^*(x) = A e^{-\beta x}$$

$$\therefore \langle T\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \hat{T} \, \psi \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} A e^{-\beta x} \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} A e^{-\beta x}\right) \, dx$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m} A^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta x} (-\beta * -\beta) e^{-\beta x} \, dx = -\frac{\beta^2 \hbar^2 A^2}{2m} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\beta x} \, dx$$

بالمقارنة مع التكامل القياسي $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax} \, dx = \frac{1}{a}}$

$$\Longrightarrow \langle T\rangle = -\frac{\beta^2\hbar^2A^2}{2m}\frac{1}{2\beta} = \frac{\beta\,\hbar^2A^2}{4m}$$

س1/باستخدام مبدأ التقابل أثبت ان:-

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle x\rangle = \frac{1}{m}\langle p_x\rangle$$

أذا علمت

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle x\rangle = \frac{i}{\hbar}\langle[\hat{H},\hat{x}]\rangle$$

س2/باستخدام مبدأ التقابل أثبت ان:-

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle p_x\rangle = \langle -\frac{\partial V}{\partial X}\rangle$$

أذا علمت

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle p_x\rangle = \frac{i}{\hbar}\langle[\hat{H},\widehat{p_x}]\rangle$$

خاصية الهيرمشن

يقال للمؤثر أنه هيرمشن عندما يحقق الشرط التالي :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\psi^*\hat{Q}\,\psi\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty}(\hat{Q}\,\psi)^*\,\psi\,dx$$

خواص مؤثرات هيرمشن

أولاً : القيمة الذاتية لمؤثر هيرمشن هي قيمة حقيقة . و لأثبات هذه الخاصية نأخذ شرط الهيرمشن :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\psi^*\hat{Q}\,\psi\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty}(\hat{Q}\,\psi)^*\,\psi\,dx \quad \boxed{\hat{Q}\,\psi = q\,\psi}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* q\, \psi\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (q\, \psi)^* \psi\, dx$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} q\, \psi^*\, \psi\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} q^* \psi^*\, \psi\, dx$$

$$\Rightarrow\ q \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*\, \psi\, dx - q^* \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*\, \psi\, dx = 0$$

$$\Rightarrow\ (q - q^*) \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*\, \psi\, dx = 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*\, \psi\, dx \neq 0 \quad and \quad (q - q^*) = 0 \ \Rightarrow\ q = q^*$$

أن النتيجة$q = q^*$ تدل على ان قيمة q هي قيمة حقيقة لأن العدد الحقيقي يساوي مرافقه العقدي .

ثانياً : الدوال الموجية الذاتية لمؤثر هيرمشن تكون متعامدة أذا لم تتساوى القيم الذاتية لها .

لو كان لدينا دالتين موجيتين هما ψ_n و ψ_m و أدخلنا عليهما المؤثر الهيرمشن $\hat{Q}$فإن :

$$\hat{Q}\psi_n = q_n\psi_n \quad and \quad \hat{Q}\psi_m = q_m\psi_m \boxed{q_n \neq q_m}$$

الآن نستخدم شرط الهيرمشن لأثبات تعامد الدلتين ψ_n و ψ_m و كما يلي :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^* \hat{Q} \psi_m\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (\hat{Q}\psi_n)^* \psi_m\, dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^* q_m \psi_m\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (q_n\psi_n)^* \psi_m\, dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} q_m \psi_n^* \psi_m\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} q_n^*\, \psi_n^* \psi_m\, dx \boxed{q_n^* = q_n}$$

$$(q_m - q_n)\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^* \psi_m \, dx = 0$$

$$q_m - q_n \neq 0 \quad becouse \quad q_n \neq q_m$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^* \psi_m \, dx = 0$$

و هذا هو شرط تعامد الدالتين الموجيتين ψ_n و ψ_m أو أي دالتين موجيتين في الميكانيك الكمي.