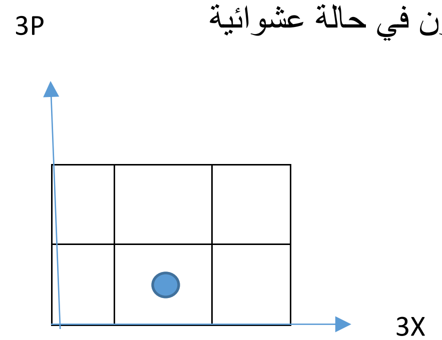
**-تطبيقات إحصاء ماكسويل -بولتزمان**

**1- حساب معدل الصفات والأنظمة**

لحساب معدل صفات الوحدات والأنظمة نعرف دالة الاحتمال $F(X,P)$

الوحدات في النظام تكون في حالة عشوائية

مستمرة في الفضاء




الدالة $F(X,P)$ هي احتمالية ايجاد نقطة التي تمثل حالة وحده ضمن حجم فضاء الطور $d\Gamma$

$$F(X,P)d\Gamma = \frac{dn}{N} \qquad (47)$$

$$dn_s = Bd\Gamma e^{\alpha+\beta\epsilon_s}$$

$$\boxed{F(X,P)d\Gamma = \frac{Bd\Gamma e^{\alpha+\beta E_s}}{N}} \qquad (48)$$

مثال / اثبت ان $\mathrm{P} = \prod_i^N F_i = (\frac{e^{\alpha}\beta}{N})^N e^{-\epsilon/KT}$

$$Fd\Gamma = \frac{dn}{N}$$

$$\frac{dn}{N} = \frac{Bd\Gamma e^{\alpha+\beta\epsilon_s}}{N}$$

$$\mathrm{P} = \prod_i^N F_i = F_1F_2F_3 \dots \dots \dots F_N$$

$$\mathrm{P}d\Gamma_{6N} = \frac{\beta d\Gamma_1}{N} e^{\alpha}.e^{\beta\epsilon_1} * \frac{\beta d\Gamma_2}{N} e^{\alpha}.e^{\beta\epsilon_2} * \frac{\beta d\Gamma_3}{N} e^{\alpha}.e^{\beta\epsilon_3}$$

$$e^{\alpha}.e^{\alpha}.e^{\alpha} \dots \dots \dots .. = (e^{\alpha})^N$$

$$\left(\frac{\beta}{N}\right).\left(\frac{\beta}{N}\right).\left(\frac{\beta}{N}\right)\dots\dots\dots.=\left(\frac{\beta}{N}\right)^{N}$$

$$\text{P}=(\frac{e^{\alpha}\beta}{N})^{N}e^{-\epsilon/_{KT}}$$

**لحساب معدل صفة من صفات الوحدات (مثلا الصفة Y)هو**

$$\overline{Y}=\frac{\int_{\Gamma}\overline{Y}(X,P)\,F(X,P)d\Gamma}{\int_{\Gamma}F(X,P)d\Gamma}=\frac{\sum_{i}Yi}{\sum_{i}Fi}. \qquad (49)$$

نعوض عن قيمة F في المعادلة

$$F(X,P)d\Gamma=\frac{dn}{N}$$

$$F(X,P)=\frac{Be^{\alpha+\beta\epsilon_{s}}d\Gamma}{N}$$

$$\overline{Y}=\frac{\int_{\Gamma}\overline{Y}(X,P)\frac{B}{N}e^{\alpha}.e^{\beta\epsilon_{s}}\,d\Gamma}{\int_{\Gamma}\frac{B}{N}e^{\alpha}.e^{\beta\epsilon_{s}}d\Gamma}=\frac{\int_{\Gamma}\overline{Y}(X,P).e^{-\frac{\epsilon_{s}}{KT}}\,d\Gamma}{\int_{\Gamma}e^{-\frac{\epsilon_{s}}{KT}}d\Gamma}$$

**2-إيجاد صفات الغاز المثالي**

من معادلة توزيع ماكسويل –بولتزمان

$$n_{s}=g_{s}e^{\alpha+\beta\epsilon_{S}}$$

$$dn_{s}=Bd\Gamma e^{\alpha+\beta\epsilon_{s}}$$

سوف نكتب dn بدلالة الزخم والطاقة والسرعة

$$dn=n_{p}(p)dp \qquad ,dn=n(E)dE\ , \qquad dn=n_{v}(v)dv$$

$$p=p+dp\,, \qquad E=E+dE \quad , \qquad V=V+dV$$

الان يمكن استخراج العلاقات التالية

$$\text{1- }dn=n_{p}(p)dp\ =\frac{4\pi N}{(2\pi mKT)^{\frac{3}{2}}}e^{\frac{-P^{2}}{2mKT}}p^{2}dp \qquad (50)$$

$$2\text{-}n_v(v)dv = 4\pi N(\frac{m}{2\pi k})^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{mv^2}{2kT}}v^2dV \qquad (51)$$

$$3\text{-}\ n_{(\epsilon)}d\epsilon = \frac{2\pi N}{(\pi KT)^{\frac{3}{2}}} * e^{-\frac{\epsilon}{KT}}\epsilon^{\frac{1}{2}}d\epsilon \qquad (52)$$

$$1 - n_p(p)dp = \underbrace{4\pi p^2dp * VB}_{g}\ \underbrace{\frac{N}{(2\pi KTm)^{\frac{3}{2}}.VB}}_{e^{\alpha}}\ e^{\frac{-P^2}{2m\,KT}}$$

$$n_p(p)dp = \quad e^{\frac{-P^2}{2m\,KT}}p^2dp$$

نكتب هذه المعادلة بدلالة السرعة

$$p = mv\ \ ,p^2 = m^2v^2, dp = mdv$$

$$n_v(v)dv = \frac{4\pi N}{(2\pi KTm)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{mv^2}{2kT}}m^2v^2.mdV = \frac{4\pi N}{(2\pi KTm)^{\frac{3}{2}}}m^3\ e^{-\frac{mv^2}{2kT}}\ v^2dV$$

$$\therefore n_v(v)dv = 4\pi N(\frac{m}{2\pi kT})^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{mv^2}{2kT}}v^2dV$$

الان نحول الاحداثيات الكروية الى الاحداثيات الاسطوانية و كما يلي

$$4\pi v^2dV = dv_x\ dv_y\ dv_z$$

فتصبح المعادلة أعلاه

$$n_v(v)dv = N(\frac{m}{2\pi kT})^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{m(v_x^2v_y^2v_z^2)}{2kT}}dv_x\ dv_y\ dv_z$$

نكتب هذا المقدار بدلالة مركبات السرعة وكما يلي

$$n_v(v)dv = n_3(v_x v_y v_z)dv_x dv_y dv_z$$

*كتبت بصيغة مركبات السرعة لسبب انه كم وحدة بالنظام تمتلك مركبة سرعة في لحظة معينة باتجاه X في مدى* $v_X \rightarrow v_x + dv_x$

يمكن إيجاد عدد الوحدات $n(v_x)dv_x$ من المعادلة رقم (50)

$$n_3(v_x v_y v_z)dv_x dv_y dv_z = N(\frac{m}{2\pi kT})^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m(v_x^2 v_y^2 v_z^2)}{2kT}} dv_x\, dv_y\, dv_z \qquad (53)$$

*اذا كان لدينا ثلاث متغيرات (x,y,z) و اردنا ان نثبت احدهما ونجعل الاخرين قيم معلومة فنستخدم التكامل*

$$\int_{v_y=-\infty}^{\infty} \int_{v_z=-\infty}^{\infty} n_3(v_x v_y v_z)dv_x dv_y dv_z = n(v_x)dv_x$$

السرعة تأخذ القيم من $\infty \rightarrow 0$ بينما مركبات السرعة تأخذ القيم من $\infty \rightarrow -\infty$ لانها قيم عددية.

$$n(v_x)dv_x = N(\frac{m}{2\pi kT})^{\frac{3}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{mv_y^2}{2kT}} dv_y \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{mv_Z^2}{2kT}} dv_Z\, e^{-\frac{mv_X^2}{2kT}} dv_x.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dv_x = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \Longrightarrow \frac{\pi}{a} = a = -\frac{m}{2kT}$$

$$n(v_x)dv_x = N(\frac{m}{2\pi kT})^{\frac{3}{2}} \frac{\pi 2kT}{m} e^{-\frac{mv_X^2}{2kT}} dv_x$$

$$n(v_x)dv_x = N(\frac{m}{2\pi kT})^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{mv_X^2}{2kT}} dv_x \qquad (54)$$

$$F_{(V_x)}dv_x = \frac{n(v_x)dv_x}{N}$$

$$F_3(v_x v_y v_z) = \frac{n_3(v_x, v_y, v_z)}{N}$$

$$F_{(V_x)} = \frac{n(v_x)}{N}$$

$$F_P(P) = \frac{n_P(P)}{N}$$

**1-نحسب معدل السرعة $V$ حسب التعريف التالي**

$$\bar{Y} = \int YFd\Gamma \qquad (55)$$

$$\bar{\bar{V}} = \int VF_V(V)dV$$

$$n_v(v)dv = 4\pi N(\frac{m}{2\pi kT})^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2 dV \ \div N$$

$$F_V(V)dV = \frac{n_v(v)dv}{N} = 4\pi(\frac{m}{2\pi kT})^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2 dV \qquad (56)$$

$$\bar{\bar{V}} = \int_0^{\infty} v4\pi(\frac{m}{2\pi kT})^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2 dV$$

$$\bar{\bar{V}} = 4\pi(\frac{m}{2\pi kT})^{\frac{3}{2}} \int_0^{\infty} V^3 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dV$$

*هذا التكامل من نوع كاما الذي يحل بالطريقة التالية*

$$\int_0^{\infty} X^n e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2(\alpha)^{\frac{n+1}{2}}} \Gamma(\frac{n+1}{2})$$

$$\int_0^{\infty} V^3 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dV = \frac{1}{2(\alpha)^{\frac{3+1}{2}}} \Gamma\left(\frac{3+1}{2}\right) = \frac{1}{2(\alpha)^2} \Gamma(2) = \frac{1}{2(\alpha)^2}$$

$$\alpha = \frac{m}{2kT} \ , \alpha^2 = \frac{m^2}{4K^2T^2}$$

$$\Gamma(1) = 1$$

$$\Gamma(2) = \Gamma(1) = 1 * 0! = 1$$

$$\Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2 * 1 * 0! = 2!$$

$$\Gamma(4) = 3\Gamma(3) = 3!$$

$$\bar{V} = 4\pi(\frac{m}{2\pi kT})^{\frac{3}{2}} * \frac{4K^2T^2}{2m^2}$$

$$\bar{V} = \frac{16\pi}{2} \frac{K^2T^2}{m^2} (\frac{m}{2\pi kT})^{\frac{1}{2}} * (\frac{m}{2\pi kT})$$

$$\bar{V} = 4\frac{KT}{m}(\frac{m}{2\pi kT})^{\frac{1}{2}} = 4\left(\frac{KT}{m}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{KT}{m}\right)^{\frac{1}{2}}(\frac{m}{2\pi kT})^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2}\left(\frac{KT}{\pi m}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \quad (57)$$

**2- حساب معدل مربع السرعة $\overline{V^2}$**

$$\bar{V} = \int V^2 F_V(V)dV$$

$$\bar{\bar{V}} = \int_0^\infty v^2 4\pi(\frac{m}{2\pi kT})^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2 dV = 4\pi(\frac{m}{2\pi kT})^{\frac{3}{2}} \int_0^\infty V^4 e^{-av^2} dv = \frac{1}{2(\alpha)^{\frac{5}{2}}}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2}\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

$$4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} * \frac{1}{2}\left(\frac{2kT}{m}\right)^{\frac{5}{2}} * \frac{3}{4}\sqrt{\pi} = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} * \frac{1}{2}\left(\frac{2kT}{m}\right)^{\frac{3}{2}} * \frac{2kT}{m}\frac{3}{4}\sqrt{\pi}$$

$$4\pi * \frac{kT}{m}\frac{3}{4}\sqrt{\pi} * \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{\pi}} = \frac{3KT}{m}$$

$$\therefore \sqrt{\overline{V^2}} = \sqrt{\frac{3KT}{m}} \quad (58)$$

**3- حساب السرعة الأكثر احتمالا $V_m$**

نقصد بالسرعة الأكثر احتمالا السرعة العادية التي تتحرك بها الجزيئات داخل الفضاء .

$$F_V(V)dV = 4\pi(\frac{m}{2\pi kT})^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2 dV$$

نفاضل المعادلة ونجعل التفاضل مساويا للصفر

$$dF_V(V)dV = 4\pi(\frac{m}{2\pi kT})^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} 2v - V^2 \frac{2mV}{2kT} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dV$$

$$\frac{dF_V(V)}{dV} = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \left(2V - \frac{V^3 m}{KT}\right)$$

$$\left( \frac{dF_V(V)}{dV} \right)_{Max} \quad Where \quad \frac{dF(V)}{dV} = 0$$

$$\left(2V - \frac{V^3 m}{KT}\right) = 0 \Longrightarrow V\left(2 - \frac{V^2 m}{KT}\right) = 0 \Longrightarrow \frac{V^2 m}{KT} = 2$$

$$\therefore \; V^2 = \frac{2KT}{m} \Longrightarrow \quad V_m = \sqrt{\frac{2KT}{m}} \qquad (59)$$