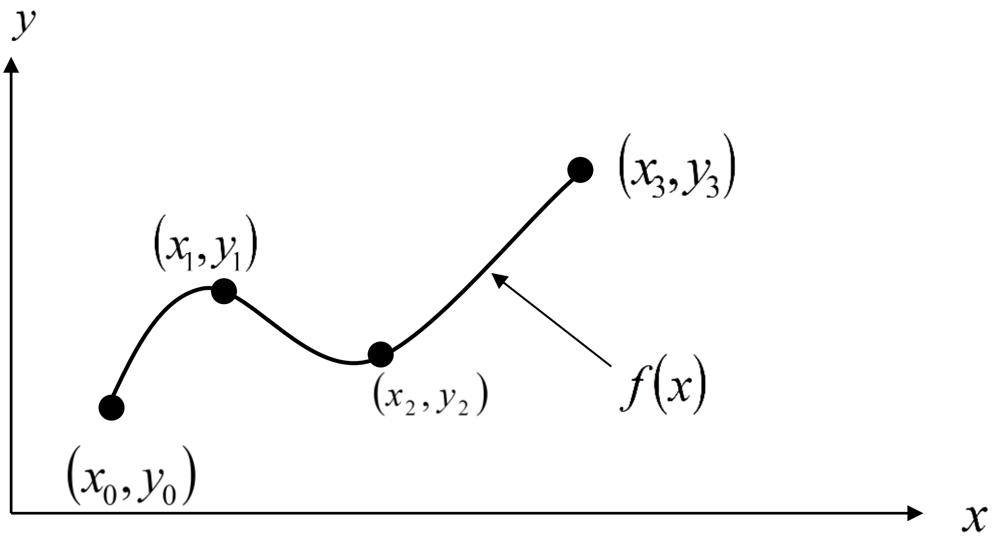
الاندراج والاستكمال INTERPOLATION & EXTRAPOLATION

في الكثير من الأحيان تتوفر مجموعة من البيانات في نقاط متفرقة مثل (x_0, y_0)، (x_1,y_1)، ... (x_{n-1}, y_{n-1})، (x_n, y_n). في هذه الحالة كيف يمكننا إيجاد قيمة y لقيمة أخرى لـ x غير موجودة في مجموعة النقاط المعروفة؟ في هذه الحالة يمكن استخدام دالة f(x) لتمثيل قيم البيانات التي عددها n+1، حيث تمر الدالة بكل النقاط المعلومة. لاحظ الشكل أدناه.



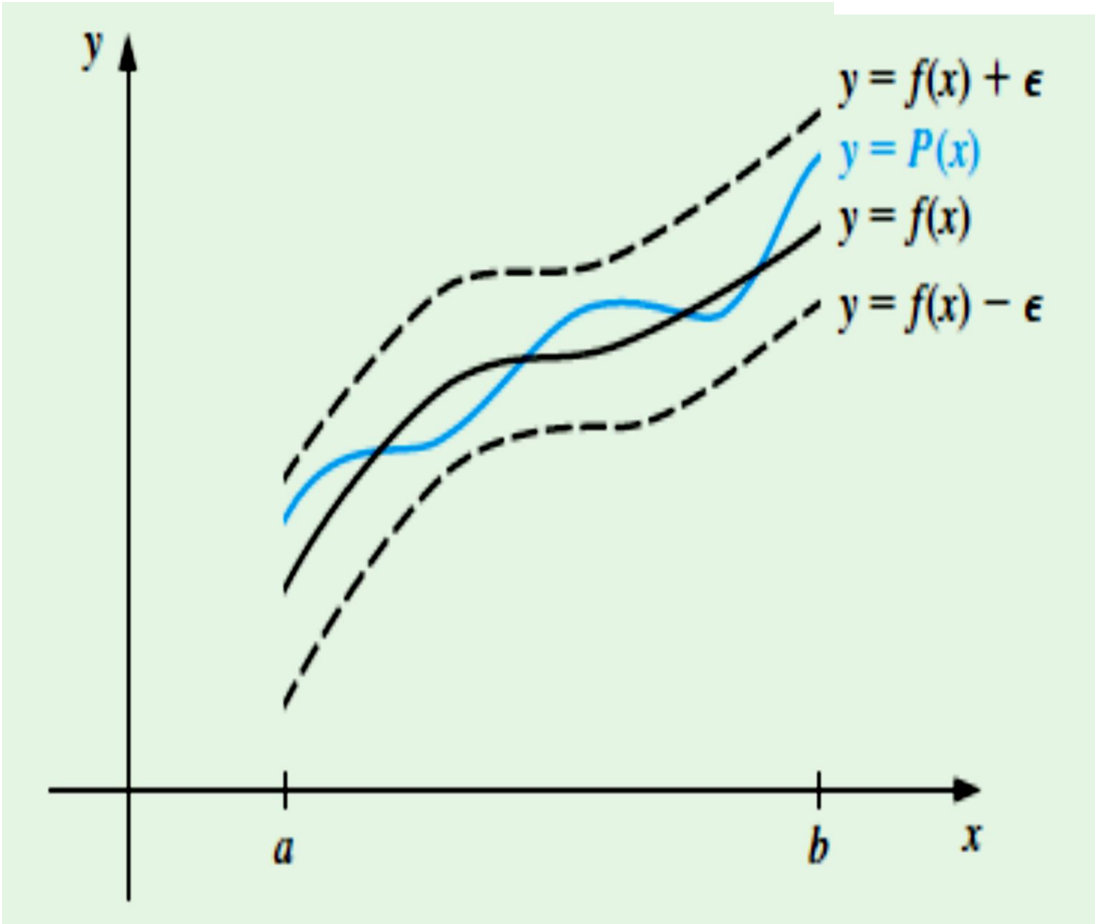
بعدها يمكن إيجاد قيمة y لأي قيمة أخرى لـ x. إذا كانت x واقعة ضمن مدى النقاط المعلومة سابقاً فإن عملية التخمين تسمى الاندراج Interpolation وإذا كانت النقطة واقعة خارج مدى هذه النقاط فإن العملية تسمى الاستكمال Extrapolation.

عادة ما تستخدم متعددة حدود كدالة اندراج f(x) وذلك لأن متعددات الحدود يمكن إيجاد قيمتها بسهولة كما يمكن اشتقاقها وإيجاد تكاملها. إن عملية توليد متعددة الحدود تتضمن إيجاد متعددة حدود ذات رتبة n والتي تمر عبر n+1 من نقاط البيانات.

إن الصيغة العامة لمتعددات الحدود هي:

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

إن متعددات الحدود هي من الأدوات المفيدة والمهمة لأن أي دالة مستمرة يمكن تقريبها إلى متعددة حدود.



Lagrange Interpolating Polynomial — <u>متعددة حدود لاكرانج</u>

واحدة من الطرق لإيجاد متعددة الحدود هذه هي متعددة حدود لاكرانج والتي يمكن توليدها من الصيغة التالية:

$$P_n(\mathrm{x}) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq j}}^{n} \frac{x - x_i}{x_j - x_i}$$

في هذه الطريقة كلما زاد عدد النقاط المستخدمة كلما زادت الدقة. إذا كانت عدد النقاط 3 كان عدد الحدود المستخدمة 3 وإذا كانت النقاط 4 كانت الحدود المستخدمة 4.

<u>مثال</u>: جد القيمة التقريبية إلى f(2.3) من جدول القيم التالية:

x	1.1	1.7	3
f(x)	10.6	15.2	20.3

بما أن عدد النقاط 3 إذن أعلى درجة لمتعددة الحدود هو 2 أي إن عدد الحدود هو 3:

$$F(x) \approx P_n(\mathrm{x}) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq j}}^{n} \frac{x - x_i}{x_j - x_i}$$

n=2

$$P_2(x) = f(x_0)\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + f(x_1)\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + f(x_2)\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$f(2.3) = 10.6\frac{(2.3-1.7)(2.3-3)}{(1.1-1.7)(1.1-3)} + 15.2\frac{(2.3-1.1)(2.3-3)}{(1.7-1.1)(1.7-3)} + 20.3\frac{(2.3-1.1)(2.3-1.7)}{(3-1.1)(3-1.7)}$$

$f(2.3) \approx 18.38.$

- **إن إضافة بيانات أخرى للدالة يؤدي إلى زيادة الدقة، وذلك لأن الدالة تقرب بمتعددة حدود بدرجة أعلى.**
- **إن طريقة لاكرانج يمكن أن تستخدم في حالتي الاندراج والاستكمال، أي يمكن استخدام قيم لـ x داخل مدى الجدول وخارجه.**

<u>واجب:</u>

1. باستخدام الجدول في المثال السابق جد قيمة كل من f(0.5)، f(2.7)، f(3.5).

2. جد قيمة كل من f(2) و f(4.5) مستفيداً من البيانات التالية باستخدام طريقة لاكرانج للاندراج:

x	1.6	2.9	3.7	4.8
f(x)	10.6	0.3448	0.2703	0.2083

3. إذا كانت لدينا البيانات التالية:

f(-1)=-21, f(1)=15, f(2)=12, f(3)=3

باستخدام طريقة لاكرانج جد قيمة كل من f(1.5), f(0), f(3.5).

البرنامج الخاص بطريقة لاكرانج:

```
x=[1.1 1.7 3];
y=[10.6 15.2 20.3];
xm=input('xm=');
sum=0;
for i=1:3
   prod=1;
   for k=1:3
      if (i~=k)
         prod=prod*((xm-x(k))/(x(i)-x(k)));
      end
   end
   sum=sum+prod*y(i);
end
disp(sum)
```

النتائج التى تظهر هي:

xm=2.3

18.3814

واجب (عملي):

1. جرب البرنامج السابق مع جدول البيانات التالية لاستخراج قيمة f(2.3):

x	1.1	1.7	3	4.2	5	6.1	7.9
f(x)	10.6	15.2	20.3	25.2	39.1	51.5	70.6

لاحظ الفرق في النتيجة.

2. جرب نفس البرنامج لحل المسائل في الواجبات النظري.