الفروقات التقدمية FORWARD DIFFERENCES

لإيجاد صيغة لتخمين قيمة x_m عندما يكون m عدد صحيح موجب باستخدام جدول الفروق عندما $y_m=f(x_m)$ نلاحظ أن:

$$Y_1 = y_0 + \Delta y_0 = (1+\Delta)y_0$$

$$Y_2 = y_1 + \Delta y_1 = (1+\Delta)(1+\Delta)y_0$$

$$Y_m = (1+\Delta)^m y_0$$

$$Y_m = y_0 + m\Delta y_0 + \left(\frac{m(m-1)}{2!}\right)\Delta^2 y_0 + \left(\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\right)\Delta^3 y_0 + \cdots$$

تسمى هذه الصيغة بصيغة نيوتن التقدمية للاندراج وهي تأخذ الفروقات في المسار القطري والذي يبدأ من y_0 والمتجه بالاتجاه الأفقي. تستخدم المتسلسلة السابقة عندما تكون abs(m)<1 حيث $m=(x_m-x_0)/h$. إذا كانت قيمة x_m قريبة من x_0 فإن القيم التي سيتم استخدامها في الحل هي القيم المظللة باللون الأصفر.

x	y	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
x_0	y_0				
		Δy_0			
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$		
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$	
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$		$\Delta^4 y_0$
		Δy_2		$\Delta^3 y_1$	
x_3	y_3		$\Delta^2 y_2$		
		Δy_3			
x_4	y_4				

<u>مثال</u>: احسب القيمة التخمينية إلى f(3/2) حيث x=1, 2, 3, 4, 5, 6، $f(x)=x^2-1$.

نكون جدول الفروقات كالتالي:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$
1	0		
		3	
2	3		2
		5	
3	8		2
		7	
4	15		2
		9	
5	24		2
		11	
6	35		

نحسب قيمة m كالتالي:

$$m = (x_m - x_0)/h = 1.5\text{-}1/1 = 0.5<1$$

وهذا يعني أننا نستطيع استخدام صيغة نيوتن التقدمية للاندراج:

$$F\left(\frac{3}{2}\right) = Y_m = y_0 + m\Delta y_0 + \left(\frac{m(m-1)}{2!}\right)\Delta^2 y_0 + \cdots$$

$$= 0 + 0.5\,(3) + (\frac{0.5(0.5-1)}{2})2$$

$$= 0 + 0.5(3) - 0.25 = 1.25$$

الفروقات التراجعية BACKWARD DIFFERENCES

نرمز للفرق التراجعي بالرمز ∇. وتكون صيغة الفرق التراجعي كالتالي:

$$\nabla y_i = y_i - y_{i-1}$$

x	y	∇	∇^2	∇^3	∇^4
x_{-2}	y_{-2}				
		∇y_{-1}			
x_{-1}	y_{-1}		$\nabla^2 y_0$		
		∇y_0		$\nabla^3 y_1$	
x_0	y_0		$\nabla^2 y_1$		$\nabla^4 y_2$
		∇y_1		$\nabla^3 y_2$	
x_1	y_1		$\nabla^2 y_2$		
		∇y_2			
x_2	y_2				

$$\nabla y_{-1} = y_{-1} - y_{-2}$$

$$\nabla y_0 = y_0 - y_{-1}$$

$$\nabla^2 y_i = \nabla(\nabla y_i) = \nabla(y_i - y_{i-1}) = \nabla y_i - \nabla y_{i-1}$$

i=0

$$\nabla^2 y_0 = \nabla(\nabla y_0) = \nabla(y_0 - y_{-1}) = \nabla y_0 - \nabla y_{-1}$$

i=1

$$\nabla^2 y_1 = \nabla y_1 - \nabla y_0$$

وبصورة عامة يعرف الفرق التراجعي ذو الرتبة k كما يأتي:

$$\nabla^k y_i = \nabla^{k-1} y_i - \nabla^{k-1} y_{i-1}$$

$$y_{i-1} = (1 - \nabla) y_i$$

$$y_i = (1-\nabla)^{-1} y_{i-1}$$

بتطبيق العلاقة أعلاه لكل $i=1, \dots , m$ نحصل على:

$$y_m = (1-\nabla)^{-m} y_0$$

فتكون الصيغة العامة للفرق التراجعي هي:

$$y_m = y_0 + m\nabla y_0 + \left(\frac{m(m+1)}{2!}\right)\nabla^2 y_0 + \left(\frac{m(m+1)(m+2)}{3!}\right)\nabla^3 y_0 + \cdots$$

تسمى هذه الصيغة بصيغة نيوتن للفرق التراجعي.

<u>مثال</u>: احسب القيمة التخمينية إلى f(5.5) حيث x=1, 2, 3, 4, 5, 6 ، $f(x)=x^2-1$.

نكون جدول الفروقات كالتالي:

x	y	Δy	Δ^2y
1	0		
		3	
2	3		2
		5	
3	8		2
		7	
4	15		2
		9	
5	24		2
		11	
6	35		

لنفس قيم المثال السابق لو أردنا تخمين النقطة *f(5.5)* فلو استخدمنا صيغة نيوتن التقدمية فإن علينا اختيار مسار قطري يبدأ بالقيمة *f(2)* أو *f(3)* وفي كلتا الحالتين تكون قيمة *m* أكبر من 1.

m= (5.5 - 2)/1 = 3.5>1

$m= (5.5 – 3)/1 = 2.5>1$

لذلك سيكون هناك خطأ كبير في الناتج. لذلك في هذه الحالة من الأفضل استخدام صيغة نيوتن التراجعية وافتراض أن y_0 تقع في نهاية الجدول.

$m= (5.5 - 5)/1= 0.5<1$

$m= (5.5 – 6)/1= -0.5<1$

إذا اعتبرنا أن النقطة $x=5$ هي x_0 فيكون الحل كالتالي:

$$f(5.5) = y_0 + m\nabla y_0 +(m(m+1)/2!)\nabla^2 y_0$$

$$=24 + 0.5(9) + (0.5(0.5+1)/2)2 = 29.25$$

إذا اعتبرنا أن النقطة $x=6$ هي x_0 فيكون الحل كالتالي:

$$f(5.5) = y_0 + m\nabla y_0 +(m(m+1)/2!)\nabla^2 y_0$$

$$= 35 + (-0.5)11 + (-0.5(-0.5+1)/2)2=29.25$$

واجب: إذا كانت

x=10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80

y=0.9848, 0.9397, 0.866, 0.766, 0.6427, 0.5, 0.342, 0.1737

خمن قيمة *f(23)* و *f(64)*.

ملاحظة: في حالات الاستكمال أي عندما تكون قيم x_m خارج مدى الجدول فإن صيغة نيوتن التقدمية تستخدم عندما $x_m<x_0$ ، وصيغة نيوتن التراجعية تستخدم عندما $x_m > x_n$.

واجب: جد تخمين النقطة f(0.5) والنقطة f(5.4) حيث أن x=1,2,3,4,5 و $f(x)=x^2$.

البرنامج بنظام MATLAB

```
clc
D=[10 0 20 0 30 0 40 0 50 0 60 0 70 0 80;
   0.9848 0 0.9397 0 0.866 0 0.766 0 0.6427 0 0.5 0 0.342
0 0.1736]';
%% Calculating Difference Table
for j=1:5
    for i=j:2:2*7-j
```

```
        D(i+1,j+2)=D(i+2,j+1)-D(i,j+1);
    end
end
D
xm=input('input xm  ');
%% Foreword OR Backward?
k=0;
for i=1:2:2*7+1
    if D(i,1)>xm
        if abs(D(i,1)-xm)<(D(3,1)-D(1,1))/2
            k=i;
            break
        else
            k=i-2;
            break
        end
    end
end
if k==0
    k=2*7+1;
end
m=(xm-D(k,1))/(D(3,1)-D(1,1));
sum=D(k,2);
coef=1;
if k<7
%% Calculating Foreword Differences
    for j=1:5
        coef=coef*(m-(j-1))/(j);
        term=coef*D(k+j,j+2);
        sum=sum+term;
    end
else
%% Calculating Backward Differences
    for j=1:5
        coef=coef*(m+(j-1))/(j);
        term=coef*D(k-j,j+2);
        sum=sum+term;
    end
end
disp(['     xm          ym'])
disp([xm sum])
```

النتائج:

D =

```
10.0000   0.9848        0        0        0        0        0

      0        0  -0.0451        0        0        0        0

20.0000   0.9397        0  -0.0286        0        0        0

      0        0  -0.0737        0   0.0023        0        0

30.0000   0.8660        0  -0.0263        0   0.0007        0

      0        0  -0.1000        0   0.0030        0   0.0002

40.0000   0.7660        0  -0.0233        0   0.0009        0

      0        0  -0.1233        0   0.0039        0  -0.0007

50.0000   0.6427        0  -0.0194        0   0.0002        0

      0        0  -0.1427        0   0.0041        0   0.0006

60.0000   0.5000        0  -0.0153        0   0.0008        0

      0        0  -0.1580        0   0.0049        0        0

70.0000   0.3420        0  -0.0104        0        0        0

      0        0  -0.1684        0        0        0        0

80.0000   0.1736        0        0        0        0        0

input xm  6

   xm       ym

 6.0000   0.9944
```