الفروقات النسبية DIVIDED DIFFERENCES

تستخدم هذه الطريقة عندما تكون قيم الدالة معلومة في نقاط لا تكون متساوية الأبعاد. تستخرج هذه الفروقات بحساب الفرق بين قيمتين متتاليتين لـ f(x) مقسوماً على الفرق بين قيمتي x.

الفرق النسبي الأول:

$$\Delta f_i = \Delta y_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} \qquad i = 0, 1, \dots, n-1$$

الفرق النسبي الثاني:

$$\Delta^2 f_i = \Delta^2 y_i = \frac{\Delta y_{i+1} - \Delta y_i}{x_{i+2} - x_i} \qquad i = 0, 1, \dots, n-2$$

وبصورة عامة يعرف الفرق النسبي ذا الرتبة k:

$$\Delta^k f_i = \Delta^k y_i = \frac{\Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i}{x_{i+k} - x_i} \qquad i = 0, 1, \dots, n-k$$

جدول الفروقات النسبية يكون بصورة عامة كالتالي:

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
x_0	y_0			
		$\Delta y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$		
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0 = \frac{\Delta y_1 - \Delta y_0}{x_2 - x_0}$	
		$\Delta y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$		$\Delta^3 y_0 = \frac{\Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0}{x_3 - x_0}$
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1 = \frac{\Delta y_2 - \Delta y_1}{x_3 - x_1}$	
		$\Delta y_2 = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$		$\Delta^3 y_1 = \frac{\Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1}{x_4 - x_1}$
x_3	y_3		$\Delta^2 y_2 = \frac{\Delta y_3 - \Delta y_2}{x_4 - x_2}$	
		$\Delta y_3 = \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3}$		$\Delta^3 y_2 = \frac{\Delta^2 y_3 - \Delta^2 y_2}{x_5 - x_2}$
x_4	y_4		$\Delta^2 y_3 = \frac{\Delta y_4 - \Delta y_3}{x_5 - x_3}$	
		$\Delta y_4 = \frac{y_5 - y_4}{x_5 - x_4}$		
x_5	y_5			

مثال: جد جدول الفروقات النسبية للقيم التالية:

x: 1 2 3 4 5

y: 1 4 9 16 25

<u>الفرق الأول:</u>

$$\Delta y_0 = \frac{(y_1 - y_0)}{x_1 - x_0} = \frac{4-1}{2-1} = 3$$

$$\Delta y_1 = \frac{(y_2 - y_1)}{x_2 - x_1} = \frac{9-4}{3-2} = 5$$

$$\Delta y_2 = \frac{(y_3 - y_2)}{x_3 - x_2} = \frac{16-9}{4-3} = 7$$

$$\Delta y_3 = \frac{(y_4 - y_3)}{x_4 - x_3} = \frac{25-16}{5-4} = 9$$

<u>الفرق الثاني:</u>

$$\Delta^2 y_0 = \frac{(\Delta y_1 - \Delta y_0)}{x_2 - x_0} = \frac{5-3}{3-1} = 1$$

$$\Delta^2 y_1 = \frac{(\Delta y_2 - \Delta y_1)}{x_3 - x_1} = \frac{7-5}{4-2} = 1$$

$$\Delta^2 y_2 = \frac{(\Delta y_3 - \Delta y_2)}{x_4 - x_2} = \frac{9-7}{5-3} = 1$$

<u>الفرق الثالث:</u>

$$\Delta^3 y_0 = \frac{(\Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0)}{x_3 - x_0} = \frac{1-1}{4-1} = 0$$

$$\Delta^3 y_1 = \frac{(\Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1)}{x_4 - x_1} = \frac{1-1}{5-2} = 0$$

فيكون جدول الفروقات كالتالي:

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
1	1			
		3		
2	4		1	
		5		0
3	9		1	
		7		0
4	16		1	
		9		
5	25			

واجب: كون جدول للفروقات النسبية للقيم التالية:

x: 1.1 1.2 1.4 1.6 2

y: 1.4886 1.8681 3.1161 5.2281 13.2345

أما صيغة الاندراج للفروقات النسبية (وتسمى صيغة نيوتن) فهي:

$$f(x) = y_0 + (x - x_0)\Delta y_0 + (x - x_0)(x - x_1)\Delta^2 y_0 + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\Delta^3 y_0 + \cdots$$

حيث أن x هي القيمة التي نريد أن نخمن قيمة الدالة عندها.

مثال: من البيانات الآتية، كون جدولاً للفروقات النسبية ثم استخدمه لحساب قيمة (2)f.

x: 0 1 4 6

y: -10 20 14 30

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
0	-10			
		30		
1	20		-8	
		-2		10/6
4	14		2	
		8		
6	30			

$$f(2) = -10 + 2 * 30 + (2 * 1 * -8) + 2 * 1 * -2\left(\frac{5}{3}\right) = 27.333$$

إن اختيار قيمة x_0 أول قيمة في الجدول يتيح استخدام حدود أكثر وبالتالي الحصول على تخمين أدق.

ملاحظة: ليس من الضروري أن تكون قيم x_i مرتبة تصاعدياً في جدول الفروقات النسبية، لذلك إذا استجدت بيانات جديدة عن قيم الدالة ماعلين سوى إضافتها إلى أسفل الجدول وحساب الفروقات النسبية لهادون المساس بالفروقات النسبية للبيانات القديمة وبذلك تكون صيغة نيوتن أفضل من صيغة لاكرانج.

واجب:

1. كون جدول الفروقات النسبية للدالة:

$$f(x) = x^3 - 2x + 1$$

وقيم x هي: x: -2, 1, 3, 4, 6 ثم خمن قيمة الدالة عند x=-1 ، x=0.

2. كون جدولاًبالفروقات النسبية للدالة المعطاة في الجدول أدناه ثم جد قيمة كل من f(2) و f(4.5) مستخدماً صيغة نيوتن:

x	1.6	2.9	3.7	4.8
f(x)	0.6250	0.3448	0.2703	0.2083

البرنامج بالـ MATLAB:

```
clc
D=[1.1 0 1.2 0 1.4 0 1.6 0 2;
   1.4886 0 1.8681 0 3.1161 0 5.2281 0 13.2345]';
```

```
k=0;
for j=1:5
   for i=j:2:5-j+3
      D(i+1,j+2)=(D(i+2,j+1)-D(i,j+1))/(D(i+j+1,1)-D(i-k,1));
   end
   k=k+1;
end
D
xm=input('xm=  ');
sum=D(1,2);
coef=1;
k=0;
for j=1:4
   c=(xm-D(j+k,1));
   coef=coef*c;
   term=coef*D(j+1,j+2);
   sum=sum+term;
   k=k+1;
end
sum
```

النتائج:

```
D =

   1.1000    1.4886         0         0         0         0

        0         0    3.7950         0         0         0

   1.2000    1.8681         0    1.7464         0         0

        0         0    6.2400         0    2.3839         0

   1.4000    3.1161         0    2.7000         0    0.4980

        0         0   10.5600         0    3.3800         0

   1.6000    5.2281         0    4.7280         0         0

        0         0   20.0160         0         0         0

   2.0000   13.2345         0         0         0         0

xm=  1.15

sum =

   1.6610
```