

LEAST SQUARES & CURVE FITTING

التربيعات الصغرى والمنحنيات الأفقية

إذا كان لدينا مجموعة قيم مترادفة لمتغيرين بالشكل:

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$$

ونريد إيجاد العلاقة الدالية بين المتغيرين x و y بالشكل:

$$y = f(x) = f(x, c_1, c_2, \dots, c_n)$$

إذا كانت الدالة الأفقية المطلوب إيجادها خطية بالنسبة للمتغير x فإن صيغتها العامة تكون:

$$y = f(x, c_1, c_2) = c_1 + c_2x$$

إن هذه المعادلة تمثل نموذجاً رياضياً يصف العلاقة بين x و y وتسمى عادة بمعادلة انحدار y على x باعتبار أن x هو المتغير المستقل ويعرف الثابت c_2 بمعامل الانحدار. وقيم c_1 و c_2 تكون كالتالي:

$$c_1 = \frac{\sum y_i \sum x_i^2 - \sum x_i \sum x_i y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

$$c_2 = \frac{n \sum y_i x_i - \sum y_i \sum x_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

مثال: جد الدالة الأفقية لجداول القيم التالية بالشكل $y = c_1 + c_2x$.

x:	1	3	4	6	8	9	11	14
y:	1	2	4	4	5	7	8	9

الحل: نجد أولاً قيمة c_1 و c_2 :

	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
	1	1	1	1
	3	2	9	6
	4	4	16	16
	6	4	36	24
	8	5	64	40
	9	7	81	63
	11	8	121	88
	14	9	196	126
sum(Σ)	56	40	524	364

$$\left(\sum x_i\right)^2 = (56)^2 = 3136$$

$$c_1 = ((40 * 524) - (56 * 364)) / (8(524) - (3136))$$

$$= 6/11$$

$$c_2 = ((8 * 364) - (40 * 56)) / (8 * (524) - (3136))$$

$$= 7/11$$

$$y = \frac{6}{11} + \frac{7}{11}x$$

$$y = a + bx$$

واجب: جد دالة بالصيغة:

التي توافق القيم التالية:

x	0	1	2	3	4
y	1	1.8	3.3	4.5	6.3

البرنامج:

```

clc
%format long g
x=[1 3 4 6 8 9 11 14];
y=[1 2 4 4 5 7 8 9];
sx=sum(x);
sy=sum(y);
sx2=sum(x.^2);
sxy=sum(x.*y);
n=length(x);
c1=(sy*sx2-sx*sxy)/(n*sx2-sx^2);
c2=(n*sxy-sy*sx)/(n*sx2-sx^2);
disp(' the Equation is ')
disp(['y=' ,{c1}, 'x+' ,{c2}])

```

النتائج:

the Equation is
'y=' [0.5455] 'x+' [0.6364]

هناك أنواع من الدوال الأفقية لا تكون خطية بالنسبة إلى x وإنما تكون خطية بالنسبة إلى c_1, c_2, \dots, c_m . إن الصيغة العامة لهذا النوع من الدوال هي:

$$y = f(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_m f_m(x)$$

حيث أن f_1, f_2, \dots, f_m دوال معرفة بشكل كامل بدلالة المتغير x ، كأن تكون متعددة حدود أو دالة مثلثية أو أسية أو غيرها. إن الصيغة أعلاه تمثل الدالة الأفقية ونحصل عليها من المنظومة التالية:

$$\sum_{i=1}^m c_i \sum_{j=1}^n f_i(x_j) f_k(x_j) = \sum_{j=1}^n y_j f_k(x_j)$$

حيث أن:

m هو عدد الدوال.

n عدد النقاط المعطاة.

إذا فرضنا أن:

$$a_{ik} = \sum_{j=1}^n f_i(x_j) f_k(x_j)$$

$$b_k = \sum_{j=1}^n y_j f_k(x_j)$$

فإن المنظومة السابقة يمكن تبسيطها إلى:

$$\sum_{i=1}^m c_i a_{ik} = b_k, \quad k = 1, 2, \dots, m$$

ومنها نحصل على قيم c_1, c_2, \dots, c_m .

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$$

مثال: باستخدام التربيعات الصغرى جد دالة بالصيغة
النقاط $(0,1), (1,-2), (2,-40)$.

لدينا في هذا المثال دالتان هما $f_1(x) = e^x, f_2(x) = e^{2x}$.

قيم x و y هي:

x	0	1	2
y	1	-2	-40

$m=2$ عدد الدوال و $n=3$ عدد النقاط.

نحسب قيمة a_{ik} حيث:

$$a_{ik} = \sum_{j=1}^n f_i(x_j) f_k(x_j)$$

$$a_{11} = f_1(x_1)f_1(x_1) + f_1(x_2)f_1(x_2) + f_1(x_3)f_1(x_3) = e^0 e^0 + e^1 e^1 + e^2 e^2 \approx 63$$

$$a_{12} = f_1(x_1)f_2(x_1) + f_1(x_2)f_2(x_2) + f_1(x_3)f_2(x_3) = e^0 e^0 + e^1 e^2 + e^2 e^4 \approx 424$$

$$a_{21} = 424$$

$$a_{22} = f_2(x_1)f_2(x_1) + f_2(x_2)f_2(x_2) + f_2(x_3)f_2(x_3) = e^0 e^0 + e^2 e^2 + e^4 e^4 \\ \approx 3036$$

نحسب قيمة b_k :

$$b_k = \sum_{j=1}^n y_j f_k(x_j)$$

$$b_1 = y_1 f_1(x_1) + y_2 f_1(x_2) + y_3 f_1(x_3) = 1 \cdot e^0 + (-2)e^1 + (-40)e^2 \approx -296$$

$$b_2 = y_1 f_2(x_1) + y_2 f_2(x_2) + y_3 f_2(x_3) = 1 \cdot e^0 + (-2)e^2 + (-40)e^4 \approx -2198$$

نعوض في المعادلة

$$\sum_{i=1}^m c_i a_{ik} = b_k, \quad k = 1, 2, \dots, m$$

$$c_1 a_{11} + c_2 a_{21} = b_1 \quad k = 1$$

$$c_1 a_{12} + c_2 a_{22} = b_2 \quad k = 2$$

$$63c_1 + 424c_2 = -296$$

$$424c_1 + 3036c_2 = -2198$$

بحل هاتين المعادلتين نحصل على $c_2 \approx -1$ ، $c_1 \approx 2$ ،

إذن تكون الدالة الأفقية بالشكل التالي:

$$y = 2e^x - e^{2x}$$

واجب:

باستخدام التربيعات الصغرى جد دالة بالصيغة:

$$y = c_1 e^{\sqrt{x}} + c_2 e^{3x}$$

التي توافق القيم (1, 32.846)، (0.5, 8.75)، (0, 2.5).

البرنامج:

```
x=[0 1 2];
y=[1 -2 -40];
m=2;
n=length(x);
f=inline('exp(x)');
a=zeros(m,m);
b=zeros(m);
for i=1:m
    for j=1:m
        for k=1:n
            a(i,j)=a(i,j)+f(i*x(k))*f(j*x(k));
        end
    end
end
for i=1:m
    for k=1:n
        b(i)=b(i)+y(k)*f(i*x(k));
    end
end
d=inv(a);
c=d*b;
disp(['c1= ',{c(1)}])
disp(['c2= ',{c(2)}])
```

النتائج:

```
'c1= '      [1.9901]
'c2= '      [-1.0020]
```