

## CENTRAL DIFFERENCES

الفروقات المركزية

يعرف مؤثر الفرق المركزي كالتالي:

$$\delta_{y_{i+1/2}} = y_{i+1} - y_i$$

$$\delta^2 y_i = \delta y_{i+1/2} - \delta y_{i-1/2}$$

$$\delta^3 y_{i+1/2} = \delta^2 y_{i+1} - \delta^2 y_i$$

$$i=0, +1, -1, +2, -2, \dots$$

x	y	$\delta$	$\delta^2$	$\delta^3$	$\delta^4$
x <sub>-2</sub>	y <sub>-2</sub>		$\delta^2_{y-2}$		$\delta^4_{y-2}$
		$\delta_{y-3/2}$		$\delta^3_{y-3/2}$	
x <sub>-1</sub>	y <sub>-1</sub>		$\delta^2_{y-1}$		$\delta^4_{y-1}$
		$\delta_{y-1/2}$		$\delta^3_{y-1/2}$	
x <sub>0</sub>	y <sub>0</sub>		$\delta^2_{y0}$		$\delta^4_{y0}$
		$\delta_{y1/2}$		$\delta^3_{y1/2}$	
x <sub>1</sub>	y <sub>1</sub>		$\delta^2_{y1}$		$\delta^4_{y1}$
		$\delta_{y3/2}$		$\delta^3_{y3/2}$	
x <sub>2</sub>	y <sub>2</sub>		$\delta^2_{y2}$		$\delta^4_{y2}$

العلاقة الأساسية التي تربط مؤثر الفرق المركزي بالمؤثرات السابقة (التقدمية والتراجعية) هي:

$$\Delta y_i = \nabla y_{i+1} = \delta_{y_{i+1/2}} \quad i = 0, 1, -1, 2, -2, \dots$$

باستخدام تعريف المؤثر  $\delta$  والعلاقة السابقة نرى بأن:

$$\Delta y_0 = \delta y_{1/2}, \quad \Delta^2 y_0 = \delta^2 y_1, \quad \Delta^3 y_0 = \delta_{y3/2}$$

وبالتعويض في صيغة نيوتن التقدمية نحصل على ما يلي:

$$y_m = y_0 + m\delta y_{1/2} + \frac{m(m-1)}{2!} \delta^2 y_1 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} \delta^3 y_{3/2} + \dots$$

من أجل الحصول على صيغة للاندرج تشكل فيها الفروقات مساراً أفقياً. بالتخصيص سوف نحصل على المسار الأفقي ما بين  $x_0$  و  $x_1$ . سنغير في صيغة الفروقات وسنعرف مؤثراً آخر هو  $\mu$  (والذي يسمى بمؤثر المعدل)

$$\mu y_{i+1/2} = \frac{1}{2} (y_{i+1} + y_i)$$

$$\mu \delta_{y_{i+1/2}} = \frac{1}{2} (\delta_{y_{i+1}} + \delta_{y_i})$$

$$\mu \delta_{y_i}^2 = \frac{1}{2} (\delta_{y_{i+1/2}}^2 + \delta_{y_{i-1/2}}^2)$$

وبذلك نحصل على صيغة الفروقات المركزية (والتي تدعى بصيغة بسل للاندرج *Bessel's Formula*). ذات الصيغة التالية:

$$y_m = \mu y_{1/2} + \left(m - \frac{1}{2}\right) \delta y_{\frac{1}{2}} + \frac{m(m-1)}{2!} \mu \delta^2 y_{1/2} + \frac{m(m-1)(m-1/2)}{3!} \delta^3 y_{1/2} + \frac{m(m^2-1)(m-2)}{4!} \mu \delta^4 y_{1/2}$$

مثال: باستخدام صيغة بسل خمن قيمة  $f(4.3)$  حيث  $f(x)=x^2$  و  $x=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$

$$\begin{aligned} \mu y_{i+1/2} &= \frac{1}{2} (y_{i+1} + y_i) \\ &= \frac{1}{2} (25 + 16) = \left(\frac{41}{2}\right) = 20.5 \end{aligned}$$

x	y	$\Delta y$	$\Delta^2 y$
1	1		
		3	
2	4		2
		5	
3	9		2
		7	
4	16		2
		9	
5	25		2
		11	
6	36		2
		13	
7	49		

$$\begin{aligned}\mu\delta^2 y_i &= \frac{1}{2}(\delta^2 y_{i+\frac{1}{2}} + \delta^2 y_{i-\frac{1}{2}}) \\ &= \frac{1}{2}(2 + 2) = 2\end{aligned}$$

$$\delta_{y1/2} = 9$$

$$\delta_{y1/2} = 0$$

$$m=0.3$$

$$f(4.3) = 20.5 + (0.3 - 0.5)(9) + \left(\frac{0.3(0.3 - 1)}{2!}\right)(2) + 0 \approx 18.49$$

واجب: إذا كانت

$x=10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80$

$y=0.9848, 0.9397, 0.866, 0.766, 0.6427, 0.5, 0.342, 0.1737$

خمن قيمة  $\cos(32)$  و  $\cos(47)$ . باستخدام صيغة بسل للاندراس.