

الأخطاء في العمليات الحسابية ERRORS IN ARITHMETIC OPERATIONS

لتكن x^* قيمة تقريبية لقيمة حقيقية x . يعرف الخطأ في القيمة التقريبية كالآتي:

$$x = x - x^*$$

كما ويسمى في أغلب الأحيان بالخطأ المطلق (Absolute Error) لتمييزه عن الخطأ النسبي (Relative Error). يعرف الخطأ النسبي δ_x بحاصل قسمة الخطأ المطلق على القيمة المضبوطة، أي:

$$\delta_x = \frac{x}{x}$$

وفي الغالب تكون قيمة x غير معلومة لذلك تستبدل قيمة x في التعريف السابق بالقيمة التقريبية x^* فنحصل على:

$$\delta_x \approx \frac{x}{x^*}$$

من الواضح بأن الاختلاف بين الخطأ المطلق والنسبي يزول عندما تكون الأعداد قريبة من 1 ويتميز أكثر كلما ابتعدت من 1.

مثال 1:

لتكن 0.0007 قيمة تقريبية للقيمة المضبوطة 0.0008 أي إن:

$$x^*=0.0007, \quad x=0.0008,$$

فإن الخطأ المطلق يساوي:

$$x = x - x^* = 0.0001$$

وهو صغير كما نرى، بينما تكون قيمة الخطأ النسبي:

$$\delta_x = \frac{x}{x} = \frac{0.0001}{0.0008} = 0.125$$

أي أن الخطأ النسبي يساوي 12.5% وهو كبير مقارنة بالخطأ المطلق وهذا يحدث عادة عندما تكون قيمة x صغيرة.

مثال 2:

ليكن $x^* = 9950$ ، $x = 10000$ فإن:

$$e_x = x - x^* = 50$$

بينما يكون:

$$\delta_x = \frac{e_x}{x} = \frac{50}{1000} = 0.005$$

أي إن الخطأ النسبي يساوي 0.5% وهو صغير مقارنة مع الخطأ المطلق.

لتكن x^* ، y^* قيمتين تقريبتين للعددين x ، y بخطأ مطلق e_x ، e_y وخطأ نسبي δ_x ، δ_y على التوالي، فيما يأتي نعطي تحليلاً للخطأ المطلق والنسبي في ناتج كل عملية من العمليات الحسابية الأربع بدلالة الخطأ في القيم التقريبية:

أولاً: عملية الجمع: الخطأ المطلق في حاصل الجمع $x^* + y^*$ يساوي:

$$e_{x+y} = (x+y) - (x^* + y^*) = (x - x^*) + (y - y^*)$$

$$e_{x+y} = e_x + e_y$$

أي إن:

أما الخطأ النسبي فهو:

$$\delta_{x+y} = \frac{e_{x+y}}{x+y} = \frac{1}{x+y} (e_x + e_y)$$

$$\delta_{x+y} = \frac{1}{x+y} (\delta_x + y\delta_y)$$

أي إن:

ثانياً: عملية الطرح: بطريقة مشابهة نحصل على:

$$e_{x-y} = e_x - e_y$$

$$\delta_{x-y} = \frac{1}{x-y} (x\delta_x - y\delta_y)$$

ثالثاً: عملية الضرب: في هذه الحالة لدينا:

$$e_{xy} = xy - x^*y^*$$

$$= xy - (x - e_x)(y - e_y)$$

$$= xe_y + ye_x - e_x e_y$$

فإذا افترضنا بأن الأخطاء صغيرة بالنسبة إلى القيم التقريبية. يمكننا إهمال الحد في حاصل ضرب الخطأين لنحصل على:

$$e_{xy} = xe_y + ye_x$$

وبتقسيم طرفي المعادلة السابقة على xy نحصل على:

$$\delta_{xy} = \delta_x + \delta_y$$

رابعاً: عملية القسمة: من تعريف الخطأ المطلق يكون حاصل قسمة القيمتين التقريبتين:

$$e_{\frac{x}{y}} = \frac{x}{y} - \frac{x^*}{y^*}$$

$$\frac{x^*}{y^*} = \frac{x - e_x}{y - e_y} = \frac{x - e_x}{y} \cdot \frac{1}{1 - \frac{e_y}{y}}$$

وحيث أن العامل الثاني هو عبارة عن مجموع المتسلسلة الهندسية:

$$1 + \frac{e_y}{y} + \left(\frac{e_y}{y}\right)^2 + \left(\frac{e_y}{y}\right)^3 + \dots$$

يكون:

$$\frac{x^*}{y^*} = \left(\frac{x - e_x}{y}\right) \left(1 + \frac{e_y}{y} + \left(\frac{e_y}{y}\right)^2 + \dots\right)$$

وبإهمال الحدود التي تحوي حاصل ضرب خطأين أو أكثر، نحصل على الخطأ المطلق في ناتج القسمة:

$$e_{\frac{x}{y}} = \frac{x}{y} \left(\frac{e_x}{x} - \frac{e_y}{y}\right)$$

ومن تعريف الخطأ النسبي نحصل على:

$$\delta_{\frac{x}{y}} = \delta_x - \delta_y$$

مثال: ليكن 3.68 و 2.133 عددين مدورين إلى الرقم الأخير لكل منهما. المطلوب إيجاد الخطأ المطلق والخطأ النسبي في حاصل ضرب العددين.

ليكن $x^* = 3.68$ ، $y^* = 2.133$ إذاً $x^* y^* = 7.84944$

إذاً الحد الأعلى للخطأ لكلا العددين هو $|e_x| \leq 0.005, |e_y| \leq 0.0005$

$$\begin{aligned} e_{xy} &= x^* e_y + y^* e_x \\ &\leq 3.68 \times 0.0005 + 2.133 \times 0.005 \\ &\approx 0.013 \end{aligned}$$

أما الخطأ النسبي فيمكن أن نحدده كما يأتي:

$$\begin{aligned} |\delta_{xy}| &= \frac{|e_{xy}|}{|x^* y^*|} \\ &\leq \frac{0.013}{7.849} = \mathbf{0.0016} \end{aligned}$$

واجب: جد الحدود العليا المحتملة للخطأ المطلق والخطأ النسبي والنسبة المئوية للخطأ لكل من الأعداد التالية على فرض أن هذه الأعداد 1. مدورة 2. مقطوعة:

أ. 1980×2.57

ب. $1980 / 2.57$

ت. $2.57 - 5.20$

ث. $2.57 + 5.20$