-دالة التوزيع لماكسويل-بولتزمان

لغرض اشتقاق دالة التوزيع لماكسويل –بولتزمان نفترض هناك بعض القيم المعينة لأرقام الاشغال للوزن (w) للترتيب الدقيق وهذا الترتيب مع اعظم وزن يعطي احتمالية التوزيع للمجموعة .

1- نجد رقم الاشغال الضروري لأعظم وزن من خلال الشرط

$$w = w_{max}$$

الدالة تكون اعظم ما يمكن ميلها يساوي صفر

$$dw = \sum_s \frac{dw}{dn_s} dn_s = 0$$

لنظام يتكون من N من الجسيمات فان الطاقة الكلية له تساوي

$$E = \sum E_s dn_S\,, \quad dE = 0$$

$$\sum dn_s = dN = 0$$

$$w = Ni \prod_1^s (\frac{g_s^{n_s}}{n_s!})$$

عند اخذ $\log W$ فالضرب يتحول الى جمع فتبح المعادلة أعلاه بالشكل التالي

$$\log W = \log N! + \sum_s \log \frac{g_s^{n_s}}{n_s!} \qquad (9)$$

نلاحظ العلاقات السابقة كلها تساوي صفر لذلك يمكن توحيدها بعلاقة واحدة باستعمال طريقة مضروبات لانكراج. $(1, \propto, \beta)$

أي نضرب $d \log w$ بالعامل (1)

نضرب dN بالعامل $(\propto)$

نضرب dE بالعامل (β)

$$1 \log W + \alpha dN + \beta dE = 0 \qquad (10)$$

$$\log W = \log N! + \sum_s n_s \log g_s - \sum_s n_s\, ! \qquad (11)$$

عند التعامل مع $\log N!$ فالافضل نستخدم تقريب ستيرلنك الذي يصلح للارقام الكبيره حتى تكون نسبة الخطأ قليلة جدا اي للأرقام الصغيرة فيساوي صفر

$$\log N! = N\log N - N \quad (12)$$

$$\log 100! = 100\log 100 - 100 \cong 100$$

$$\log 10! = 10\log 10 - 10 = 0$$

$$\sum_s \frac{d\log w}{dn_s} dn_s + \alpha \sum\nolimits_s dn_s + \beta \sum\nolimits_S \epsilon_s dn_s = 0$$

$$\left\{\sum \frac{d\log w}{dn_s} + \alpha + \beta\right\} dn_s = 0 \quad (13)$$

$$\sum \frac{d\log w}{dn_s} + \alpha + \beta = 0 \quad (14)$$

نرجع للمعادلة رقم *(11)* ونطبق عليها تقريب ستيرلنك فنحصل على

$$\log W = N\log N - N + \sum\nolimits_s n_s \log g_s - \sum\nolimits_s n_s \log n_s + \sum\nolimits_s n_s \quad (15)$$

ثم نشتق المعادلة رقم (14) فنصل على

$$d\log w = dn_s \log g_s - dn_s \log n_s - n_s * \frac{1}{n_s} + dn_s$$

$$\frac{d\log w}{dn_s} = \log g_s - \log n_s - n_s * \frac{1}{n_s} + 1$$

$$\frac{d\log w}{dn_s} = \log g_s - \log n_s \quad (16)$$

$$\frac{d\log w}{dn_s} = \log \frac{g_s}{n_s}$$

نعوض هذا المقدار في المعادلة (14)

$$\log \frac{g_s}{n_s} + \alpha + \beta\epsilon_s = 0 \quad (17)$$

$$\log \frac{g_s}{n_s} = -(\alpha + \beta\epsilon_s)$$

$$\frac{g_s}{n_s} = e^{-(\alpha+\beta\epsilon_s)} \qquad (18)$$

$$g_s = n_s e^{-(\alpha+\beta\epsilon_s)}$$

نقلب المعادلة نحصل على

$$n_s = g_s e^{(\alpha+\beta\epsilon_s)} \qquad (19)$$

التوزيع العام لوحدات الطاقة المختلفة على شرائح الطاقة المختلفة الان اذا كان $g_s = 1$ تصبح

$$n_s = e^{(\alpha+\beta\epsilon_s)}$$

هذه المعادلة تعطي التوزيع الدقيق لوحدات الطاقة في الشريحة الواحدة.

3-إيجاد مضروب لانكراج (β)

نفترض وجود نظامين A'', A' يحتويان N'', N' وضع النظامان في تماس حراري بحيث يحدث تبادل طاقي بينهما الى ان يصلان الى الحالة التوازن الحراري عندما تكون درجة الحرارة متشابهة والطاقة الكلية للنظامين E تكون مستقرة او ثابتة.

$$A'', \qquad A'$$

$$N'', \qquad N'$$

$$dN' = 0\,, \quad dN'' = 0\,, d\epsilon = 0$$

للشرائح

$$dN'_S\,, \qquad dN''_S$$

للطاقات

$$\epsilon'_S\,, \qquad \epsilon''_S$$

$$E = \sum_S n'_S E'_S + n''_S E''_S \qquad (20)$$

$$N = \sum_S n_s \;\; , dN' = \sum_s dn'_s \quad , dN'' = \sum_s dn''_s$$

$$dE = \sum_S \underset{\substack{\downarrow \\ \beta}}{\epsilon'_S} \quad \underset{\substack{\downarrow \\ \alpha}}{dn'_s} + \sum_s \epsilon''_S d''_s = 0 \qquad (21)$$

$$w_{Total} = w' * w'' \tag{22}$$

$$\log w_{Total} = \log w' * \log w'' \tag{23}$$

$$\log w_{Total} + \alpha' dN' + \alpha'' dN'' + \beta d\epsilon = 0 \tag{24}$$

$$\log w' = \sum_s \frac{d \log w'}{dn'_s} dn'_s \quad , \log w'' = \sum_s \frac{d \log w''}{dn''_s} dn''_s$$

نعوض القيم المستخرجة ل $d\epsilon$, dN , $\log w$ في المعادلة (23)

$$\sum_s \frac{d \log w'}{dn'_s} dn'_s + \sum_s \frac{d \log w''}{dn''_s} dn''_s + \alpha' \sum_s dn'_s \quad + \alpha'' \sum_s dn''_s$$

$$+\beta \sum_S \epsilon'_S \quad dn'_s + \sum_s \epsilon''_S dn''_s = 0 \tag{25}$$

نفضل النظام الأول على الثاني

$$\left(\sum_s \frac{d \log w'}{dn'_s} + \alpha' + \beta\epsilon'_S\right) \quad dn'_s + \left(\sum_s \frac{d \log w''}{dn''_s} + \alpha'' + \ \beta\epsilon''_S\right) dn''_s$$

$$\frac{d \log w'}{dn'_s} \alpha' + \beta\epsilon'_S = 0$$

$$\frac{d \log w''}{dn''_s} \alpha'' + \ \beta\epsilon''_S = 0$$

$$\therefore \ \beta = f(T)$$

كلا التوزيعان يعتمدان على الثابت β وهذا يعني ان β دالة لدرجة الحرارة لأنه ثابت نفس درجة الحرارة.

اعتماد β على تغير الطاقة

ان تغير الطاقة ينتج من إضافة كمية من الحرارة dQ الى النظام وإنجاز شغل(pdv) حيث p يمثل الضغط الذي يؤثر على النظام من المحيط و dv التغير بالحجم وبموجب قانون الثرموداينمك الأول.

$$dQ = dE + dW \tag{26}$$

$$dE = dQ - pdv$$

والطاقة تعطى بالعلاقة التالية

$$dE = d \sum_S E_s n_s = \sum E_S dn_s + \sum n_s dE_S$$

$dQ \qquad -pdv$

وبمقارنة معادلتي الطاقة بشكليها نستنتج ان التغير بالطاقة وسببه التغير في حجم النظام وعليه فان المقدار

$$\sum n_s dE_S = -pdv$$

$$\sum E_s dn_s = dQ$$

في حالة عدم التغير في الحجم نحصل على

$$d\log W + \alpha dN + \beta dQ = 0 \qquad (28)$$

0

لان أي زيادة في الطاقة يجب ان يكون راجعا (dQ) وفي حالة الحرارة المجهزة لأي مجموعة مع ثبوت عدد الوحدات $dN = 0$

$$\mathrm{d}\log W = -\beta dQ \qquad (29)$$

$$\therefore\ dQ = -\frac{d\log w}{\beta}$$

$$\frac{dQ}{T} = dS \qquad (30)$$

$$dS = -\frac{d\log W}{T\beta} \qquad (31)$$

$$ds = -kd\log w \qquad (32)$$

$$k = -\frac{1}{T\beta}$$

$$\therefore\ \beta = -\frac{1}{TK} \qquad (33)$$

4- معدل طاقة النظام

من النظرية الحركية للغازات فان معدل الطاقة النظام تمتلك قيمة مشتقة من معادلة الغاز المثالي والتي تساوي

$$\bar{E} = \frac{3}{2}KT \qquad (34)$$

$K = \frac{R}{N_a}$ $\quad , \epsilon_{Total} = \sum_s n_s \epsilon_S \quad , N = \sum_s n_s$

$$E_{Total} = \sum_s \epsilon_S \, g_s e^{(\alpha + \beta\epsilon_S)} \qquad (35)$$

$$\bar{E} = \frac{E_{T0tal}}{N} = \frac{\sum_s \epsilon_S g_s e^{(\alpha+\beta\epsilon_S)}}{\sum_S g_s e^{(\alpha+\beta\epsilon_S)}} \qquad (36)$$

وان العامل e^{α} عامل يمكن التخلص منه

لأجل حساب المقدار في المعادلة السابقة نكتب g_s كدالة لطاقة الشريحة (dE_s) ولهذا نفرض ان الحجوم المتساوية من فظاء الطور تحتوي على عدد متساوي من حالات الطاقة ، لذلك سوف نفرض ان كل وحدة حجم في فضاء الطور تحتوي على العدد B من حالات الطاقة.

وعلية فان جزء من فضاء الطور يحتوي على عدد من حالات الطاقة تعطى بالعلاقة التالية.

$$d\Gamma \implies Bd\Gamma$$

$$g_s = B(d\Gamma)_S \qquad (37)$$

$$\Delta\Gamma = \int (d\Gamma)_s = \int_x \int_y \int_z dp_x dp_y dp_z dx dy dz \qquad (38)$$

التكامل فقط للفضاء العادي

$$\Delta\Gamma_s = dp_x dp_y dp_z * V$$

أي ان الغاز يتحرك في حجم ثابت والذي هو جزء من فضاء الطور والجزء الاخر يمثل فظاء الزخم . الان يمكن كتابة التغير في الزخم بالإحداثيات الكروية.

$$dV = dxdydz = 4\pi r^2 dr$$

$$\Delta\Gamma_s = 4\pi p^2 dp * V \qquad (39)$$

$$g_s = 4\pi p^2 dp * V$$

$$E = \frac{P^2}{2M}, P^2 = 2ME \ , P = \sqrt{2ME} \Rightarrow P = (2M)^{\frac{1}{2}} (E)^{\frac{1}{2}}$$

$$g_s = 4\pi 2mE(2M)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} (E)^{-\frac{1}{2}} dE.VB$$

$$g_s = 2\pi(2m)^{\frac{3}{2}} E^{\frac{1}{2}} dE.VB \qquad (40)$$

نعوض هذه النتيجة في المعادلة رقم (36) فنحصل على التكامل التالي

$$\bar{E} = \frac{E_{TOtal}}{N} = \frac{3}{2}KT = \frac{\int_0^\infty 2\pi(2M)^{\frac{3}{2}}E^{\frac{3}{2}}e^{\beta E}dE.VB}{\int_0^\infty 2\pi(2M)^{\frac{3}{2}}E^{\frac{1}{2}}e^{\beta E}dE.VB} = \frac{\int_0^\infty E^{\frac{3}{2}}e^{\beta E}dE}{\int_0^\infty E^{\frac{1}{2}}e^{\beta E}dE} \qquad (41)$$

هذا التكامل الذي حدوده مقربة الى المالانهاية (لان الطاقات المتوفرة للوحدات من قيمه دنيا الى قيمه عليا هي المالانهاية) وان هذا التكامل من نوع كاما

لذلك سوف نفترض

$$X = \frac{E}{KT} \quad , \qquad E = X(KT) \qquad , dE = dX(KT)$$

نعوض هذه المتغيرات في التكامل أعلاه

$$\int_0^\infty E^{\frac{3}{2}}e^{\beta E}dE = \int_0^\infty e^{-X}(KT)^{\frac{3}{2}} * X^{\frac{3}{2}} * KTdx = (KT)^{\frac{5}{2}}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = (KT)^{\frac{5}{2}} * \frac{3}{2} * \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

$$= (KT)^{\frac{5}{2}}\frac{3}{4}\sqrt{\pi}$$

وبنفس الصريقة نحسب المقام ونعوضها في المعادلة رقم (41)

$$\bar{E} = \frac{E_{TOtal}}{N} = \frac{3}{2}KT = \frac{(KT)^{\frac{5}{2}}\frac{3}{4}\sqrt{\pi}}{(KT)^{\frac{3}{2}}\frac{1}{2}\sqrt{\pi}} = \frac{3}{2}KT = -\frac{3}{2\beta}$$

$$\boxed{\frac{3}{2}KT = -\frac{3}{2}\frac{1}{\beta}}$$