٤ - حل معادلة الحركة التوافقية المضمحلة :

نفرض أن
$$D = \frac{d}{dt} \quad , \quad D^2 = \frac{d^2}{dt^2}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2r\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

$$D^2x + 2rDx + \omega_0^2 x = 0$$

$$(D^2 + 2rD + \omega_0^2)\, x = 0$$

أما $x = 0$ وهذا غير ممكن أو

$$D^2 + 2rD + \omega_0^2 = 0$$

نحل بطريقة الدستور

$$D = \frac{-2r \mp \sqrt{4r^2 - 4\omega_0^2}}{2}$$

$$\therefore D = -r \mp \sqrt{r^2 - \omega_0^2}$$

$$Dx = \left(-r \mp \sqrt{r^2 - \omega_0^2}\right) x$$

$$\frac{dx}{dt} = \left(-r \mp \sqrt{r^2 - \omega_0^2}\right) x$$

$$\therefore \int \frac{dx}{x} = \left(-r \mp \sqrt{r^2 - \omega_0^2}\right) \int dt$$

$$\ln x = \left(-r \mp \sqrt{r^2 - \omega_0^2}\right) t + \underline{\ln c}$$ ثابت تكامل

$$\ln \frac{x}{c} = \left(-r \mp \sqrt{r^2 - \omega_0^2}\right) t$$

$$\therefore \boxed{X = C e^{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}\; t}}$$

∴ الحل الكامل للمعادلة التفاضلية هي

$$X_1 = C_1 e^{-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}\; t}$$ الجزء الموجب

$$X_2 = C_2 e^{-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}\; t}$$ الجزء السالب

$$X = C_1 e^{-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}\; t} + C_2 e^{-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}\; t}$$

$$\therefore \boxed{X = \frac{X_0}{2} e^{-\gamma t} \left[\left(1 + \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}}\right) e^{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}\; t} + \left(1 - \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}}\right) e^{-\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}\; t} \right]}$$

هذه المعادلة تأخذ اشكالاً مختلفة بالاعتماد على قيمة عامل الاضمحلال (γ)، فتبعاً لذلك هناك اربعة حالات للحركة يعتمد كل منها على قيمة γ بالنسبة لـ ω_0 وهي .

○ حالات الاضمحلال الأربعة :

* الحالة الأولى : الحالة التي يكون فيها عامل الاضمحلال ($\gamma = 0$)

وهي الحالة التي تمثل حالة انعدام الاضمحلال ($\gamma = 0$) اي أن المقاومة التي يعانيها الجسم المهتز تكون منعدمة تماماً ($R = 0$) اي أنها حركة توافقية بسيطة غير مضمحلة .

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$$ (حالة الاهتزاز الحر)

حل المعادلة $\therefore X = C \sin(\omega_0 t + \theta)$ $\quad T = 2\pi\sqrt{\frac{k}{m}}$

حيث C تمثل سعة الحركة وتبقى ثابتة مع الزمن

[illegible]

• **الحالة الثالثة** : حالة الحركة المتناقصة الاضمحلالية

r تكون صغيرة مقارنة مع التردد الزاوي ω_0 اي أن :

$$\frac{r}{2m} < \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad r < \omega_0$$

اي أن ($r^2-\omega_0^2$) كمية سالبة لذلك نفترض بأنه :

$$\sqrt{r^2-\omega_0^2} = i\omega$$

$$X = \frac{X_0}{2} e^{-rt}\left[\left(1+\frac{r}{i\omega}\right)e^{i\omega t} + \left(1-\frac{r}{i\omega}\right)e^{-i\omega t}\right]$$

$$X = X_0 e^{-rt}\left[\left(\frac{e^{i\omega t}+e^{-i\omega t}}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{r}{i\omega}e^{i\omega t} - \frac{r}{i\omega}e^{-i\omega t}\right)\right]$$

$$X = X_0 e^{-rt}\left[\left(\frac{e^{i\omega t}+e^{-i\omega t}}{2}\right) + \frac{r}{i\omega}\left(\frac{e^{i\omega t}-e^{-i\omega t}}{2}\right)\right]\frac{\omega}{\omega}$$

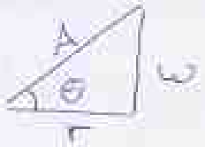
$$= X_0 e^{-rt}\frac{1}{\omega}\left[\omega\cos\omega t + r\sin\omega t\right]$$

نعوض عن $\quad r = A\cos\theta \quad , \quad \omega = A\sin\theta$

$$X = X_0 e^{-rt}\frac{1}{\omega}\left[A\sin\theta\cos\omega t + A\cos\theta\sin\omega t\right]$$

متطابقة مثلثية

$$X = X_0 e^{-rt}\frac{A}{\omega}\sin(\omega t+\theta)$$



$$A = \sqrt{r^2+\omega^2} \quad , \quad \theta = \tan^{-1}\frac{\omega}{r}$$

$$\therefore \boxed{X = Ce^{-rt}\sin(\omega t+\theta)}$$

وهذه تمثل معادلة توافقية بسيطة مضمحلة

ترددها الزاوي $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - r^2}$ وان سعة الحركة (Ce^{-rt}) حيث ان $\boxed{C = 1-\frac{r^2}{\omega^2}}$

وان السعة تتناقص اسياً مع الزمن

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2-r^2}}$$