أمثلة

① استخرج المعادلة التفاضلية الاعتيادية المرتبطة بالدالة الاصلية

$$y = cx^2 + c^2 \quad , \quad x^2 + (y-2)^2 = c$$

ثم حدد المرتبة والدرجة للمعادلة التفاضلية.

الحل:

$$x^2 + (y-2)^2 = c$$

$$2x + 2(y-2)\frac{dy}{dx} = 0 \;\Big]\div 2$$

$$x + (y-2)y' = 0$$

المرتبة الاولى ، الدرجة الاولى

② برهن ان $y = ce^{-x}$ هي حل للمعادلة التفاضلية $y' + y = 0$

الحل:

$$y = ce^{-x}$$
$$y' = -ce^{-x}$$

$$y' + y = -ce^{-x} + ce^{-x} = 0$$

بما ان الدالة تحقق المعادلة التفاضلية المعطاة ∴ هي حل للمعادلة

③ برهن ان $y = \sin 2x$ هي حل للمعادلة التفاضلية $y'' + 4y = 0$

الحل:

$$y = \sin 2x$$
$$y' = 2\cos 2x$$
$$y'' = -4\sin 2x$$
$$4y = 4\sin 2x$$

$y'' + 4y = -4\sin 2x + 4\sin 2x = 0$

بما ان الدالة تحقق المعادلة التفاضلية المعطاة

∴ هي حل للمعادلة

④ اوجد قيمة الثابت C للمعادلة التفاضلية $y' = 3x$ اذا كان حلها العام هو 3 والمتغير المستقل هو 2 .

الحل :

$y' = 3x$

$\frac{dy}{dx} = 3x$

$dy = 3x\,dx$

$\int dy = \int 3x\,dx$

$y = 3\frac{x^2}{2} + c$

$y = \frac{3}{2}x^2 + c$

$3 = \frac{3}{2}(2)^2 + c$

$3 = 6 + c$

$\boxed{c = -3}$

37

محاضرة ٧

5 جد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(x+1)\frac{dy}{dx}=2y$$

$$(x+1)dy=2y\,dx\,]\div y(x+1)$$

$$\frac{dy}{y}=\frac{2}{(x+1)}dx$$

$$\int\frac{dy}{y}=\int\frac{2}{(x+1)}dx$$

$$\ln y=2\ln(x+1)+C$$

$$\ln y-\ln(x+1)^2=C$$

$$\ln\left(\frac{y}{(x+1)^2}\right)=C$$

$$e^{\ln\left(\frac{y}{(x+1)^2}\right)}=e^{C}$$

$$\frac{y}{(x+1)^2}=C_1$$

$$\therefore y=C_1(x+1)^2$$

18

(6) حل المعادلة التفاضلية

$$y' = \frac{x^2+y^2}{xy}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+y^2}{xy}$$

$$xy\,dy = (x^2+y^2)\,dx$$

$$y = vx \Rightarrow dy = v\,dx + x\,dv$$

$$[x(vx)][v\,dx + x\,dv] = (x^2+(vx)^2)\,dx$$

$$(vx^2)(v\,dx + x\,dv) = x^2\,dx + v^2x^2\,dx$$

$$\cancel{v^2x^2dx} + vx^3\,dv = x^2\,dx + \cancel{v^2x^2\,dx}$$

$$vx^3\,dv = x^2\,dx \;]\div x^3$$

$$\int v\,dv = \int \frac{1}{x}\,dx$$

$$\frac{v^2}{2} = \ln x + C \;]\times 2$$

$$v^2 = 2\ln x + 2C$$

$$v^2 = \ln x^2 + 2C$$

$$\frac{y^2}{x^2} = \ln x^2 + 2C$$

$$y^2 = x^2\ln x^2 + C_1x^2$$

(7) **مثال:** اثبت ان $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} + x$ هو الحل العام للمعادلة التفاضلية $y'' - 3y' + 2y = 2x - 3$. ثم جد معادلة المنحني التكاملي الذي يمر بالنقطتين $(0,0)$ و $(1,0)$

الحل:

$$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} + x$$

$$y' = c_1 e^{x} + 2c_2 e^{2x} + 1$$

$$y'' = c_1 e^{x} + 4c_2 e^{2x}$$

$$y'' - 3y' + 2y = (c_1 e^{x} + 4c_2 e^{2x}) - 3(c_1 e^{x} + 2c_2 e^{2x} + 1) + 2(c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} + x)$$

$$= \cancel{c_1 e^{x}} + \cancel{4c_2 e^{2x}} - \cancel{3c_1 e^{x}} - \cancel{6c_2 e^{2x}} - 3 + \cancel{2c_1 e^{x}} + \cancel{2c_2 e^{2x}} + 2x$$

$$= 2x - 3$$

$\therefore$ هو حل للمعادلة التفاضلية.

عندما $y = 0$, $x = 0$ نجد ان $c_1 + c_2 = 0 \quad \text{...} ①$

وعندما $y = 0$, $x = 1$ نجد ان $c_1 e + c_2 e^{2} = -1 \quad \text{...} ②$

$$① \Longrightarrow c_1 = -c_2$$

$$② \Longrightarrow -c_2 e + c_2 e^{2} = -1 \Longrightarrow (e^{2} - e)c_2 = -1$$

$$\therefore c_2 = \frac{-1}{(e^{2} - e)} \Longrightarrow c_1 = -c_2 = \frac{1}{e^{2} - e}$$

$$y = x + \frac{e^{x}}{e^{2}-e} - \frac{e^{2x}}{e^{2}-e}$$

$$\therefore y = x + \frac{e^{x}-e^{2x}}{e^{2}-e} .$$

(8) مثال: اثبت ان $y = c_1 + e^{3x}(c_2 + c_3 x)$ هو الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 6\frac{d^2y}{dx^2} + 9\frac{dy}{dx} = 0$$

ثم جد حلها الخاص الذي يحقق الشروط الابتدائية $y = 0$ ، $y' = 2$ ، $y'' = -6$ عندما $x = 0$.

الحل:

$$y = c_1 + c_2 e^{3x} + c_3 x e^{3x}$$

$$y' = 3c_2 e^{3x} + c_3 x \cdot (3e^{3x}) + e^{3x} \cdot (c_3)$$
$$= 3c_2 e^{3x} + 3c_3 x e^{3x} + c_3 e^{3x}$$

$$y'' = 9c_2 e^{3x} + 3c_3 x \cdot (3e^{3x}) + e^{3x} \cdot (3c_3) + 3c_3 e^{3x}$$
$$= 9c_2 e^{3x} + 9c_3 x e^{3x} + 3c_3 e^{3x} + 3c_3 e^{3x}$$
$$= 9c_2 e^{3x} + 9c_3 x e^{3x} + 6c_3 e^{3x}$$

$$y''' = 27c_2 e^{3x} + 9c_3 x \cdot (3e^{3x}) + e^{3x} \cdot (9c_3) + 18c_3 e^{3x}$$
$$= 27c_2 e^{3x} + 27c_3 x e^{3x} + 9c_3 e^{3x} + 18c_3 e^{3x}$$
$$= 27c_2 e^{3x} + 27c_3 x e^{3x} + 27c_3 e^{3x}$$

$$y''' - 6y'' + 9y' = 27C_2e^{3x} + 27C_3xe^{3x} + 27C_3e^{3x} - 6(9C_2e^{3x} + 9C_3xe^{3x} + 6C$$
$$+ 9(3C_2e^{3x} + 3C_3xe^{3x} + C_3e^{3x})$$

$$= 27C_2e^{3x} + 27C_3xe^{3x} + 27C_3e^{3x} - 54C_2e^{3x} - 54C_3xe^{3x} - 36C_3e^{3x} +$$
$$27C_2e^{3x} + 27C_3xe^{3x} + 9C_3e^{3x}$$

$$= 0$$

∴ هو حل للمعادلة التفاضلية

ايجاد الحل الخاص واجب

9 مثال: جد المعادلة التفاضلية لكل دوائر المستوي

واجب

الحل: معادلة اي دائرة في المستوي هي $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

حيث ان (a,b) هو مركز الدائرة ، r نصف قطرها

$$2(x-a) + 2(y-b)y' = 0 \quad]\div 2$$
$$(x-a) + (y-b)y' = 0 \quad \text{---} \quad (1)$$
$$1 + (y-b)\cdot y'' + y'\cdot y' = 0$$
$$1 + (y-b)y'' + (y')^2 = 0 \quad \text{---} \quad (2)$$
$$(y-b)\cdot y''' + y''\cdot y' + 2(y')\cdot y'' = 0$$
$$(y-b)y''' + y'y'' + 2y'y'' = 0$$
$$(y-b)y''' + 3y'y'' = 0 \quad \text{---} \quad (3)$$

ونحذف b من المعادلتين (2) و (3) وذلك

$$1+(y-b)y''+(y')^2=0 \quad]\cdot y'''$$
$$(y-b)y'''+3y'y''=0 \quad]\cdot y''$$

$$y'''+\cancel{(y-b)y''y'''}+(y')^2y'''=0$$
$$\mp\cancel{(y-b)y''y'''}\mp 3y'(y'')^2=0 \qquad \text{بالطرح}$$

$$y'''+(y')^2y'''-3y'(y'')^2=0$$

$$y'''\left[1+(y')^2\right]-3y'(y'')^2=0$$

(1) **مثال:** جد حل المعادلة التفاضلية $y'''=24x-6+e^{x}$

الحل

$$\frac{d^3y}{dx^3}=24x-6+e^{x}$$

$$\int d\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)=\int(24x-6+e^{x})\,dx$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=12x^2-6x+e^{x}+c_1$$

$$\int d\left(\frac{dy}{dx}\right)=\int(12x^2-6x+e^{x}+c_1)\,dx$$

$$\frac{dy}{dx}=4x^3-3x^2+e^{x}+c_1x+c_2$$

$$\int dy=\int(4x^3-3x^2+e^{x}+c_1x+c_2)\,dx$$

$$y=x^4-x^3+e^{x}+\frac{c_1}{2}x^2+c_2x+c_3$$