محاضرة 3

الشرط الابتدائي

الشرط الابتدائي مع المعادلة التفاضلية نسميها مسالة القيم الابتدائية وتساوي الحل الخاص.

- نحل المعادلة التفاضلية حلا عاما.
- التعويض بالشرط الابتدائي.
- التعويض بمجموعة الحل العام بقيمة الثابت الاختياري.

مثال : أوجد حل القيمة الابتدائية للمعادلة التالية $y'+y=0$ في $y(3)=2$ ، علما أن الحل العام للمعادلة التفاضلية هو $y(x)=ce^{-x}$ حيث c عدد ثابت .

الحل :

$$y(x)=ce^{-x} \;.....(1)$$
$$y(3)=ce^{-x}$$
$$2=ce^{-x}$$
$$c=\frac{2}{e^{-3}}=2e^{3}$$

نعوضها في معادلة (1)

$$y(x)=2e^{3}\cdot e^{-x}$$
$$y(x)=2e^{3-x}$$

مثال :

أوجد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية $y'+y=0$ عندما $y(0)=0$ ، $y'(0)=1$ وحلها العام هو $y(x)=c_1\sin 2x+c_2\cos 2x$.

الحل :

$$y(x)=c_1\sin 2x+c_2\cos 2x \;.....(1)$$
$$y(0)=c_1\sin 2(0)+c_2\cos 2(0)$$
$$0=0+c_2$$
$$c_{2=0} \;....(2)$$

$$y'(x)=2c_1\cos 2x-2c_2\sin 2x$$
$$y'(0)=2c_1\cos 2(0)-2c_2\sin 2(0)$$
$$1=2c_1-0$$
$$c_1=\frac{1}{2}\ ......(3)$$

نعوض كل من المعادلتين (2) و (3) في المعادلة (1)

$$y(x)=c_1\sin 2x+c_2\cos 2x$$
$$y(x)=\frac{1}{2}\sin 2x$$

الحل الخاص الذي يحقق الشرطين

المعادلات التفاضلية ذات المعاملات الخطية / المعادلة التفاضلية الاساسية !.

$(ax+by+c)dx+(\alpha x+\beta y+\gamma)dy=0$ حيث $a,b,c,\dots$ ثوابت. نلاحظ ان المعاملات هي دوال خطية بالمتغيرين x و y.

مثال : حل المعادلة التفاضلية $(2x-3y+4)dx+(3x-2y+1)dy=0$

الحل :

$$(2x-3y+4)dx+(3x-2y+1)dy=0$$

معادلة تفاضلية ذات معاملات خطية ، نضع

$$2x-3y+4=0\quad]*3$$
$$3x-2y+1=0\quad]*2$$

$$6x-9y+12=0$$
$$6x-4y+2=0$$
$$\overline{\quad\quad\quad\quad\quad}$$
$$-5y=-10$$
$$y=2$$

نعوضها في إحدى المعادلتين أعلاه لنحصل على x

$$2x-3(2)+4=0$$
$$2x=2$$
$$x=1$$

نفرض

$$x=x_1+1\Rightarrow dx=dx_1+0$$
$$y=y_1+2\Rightarrow dy=dy_1+0$$

نعوضها في المعادلة التفاضلية

$$[2(x_1+1)-3(y_1+2)+4]dx_1+[3(x_1+1)-2(y_1+2)+1]dy_1=0$$
$$(2x_1-3y_1)dx_1+(3x_1 \_ 2y_1)dy_1=0$$

أصبحت معادلة تفاضلية من النوع المتجانس من الدرجة الأولى
وتحل بإتباع نفس خطوات حل المعادلات التفاضلية من النوع المتجانس .

ملاحظة/ تحول معادلة ذات المعاملات الخطية الى معادلة تفاضلية من النوع المتجانس.

المعادلات التفاضلية التامة

التفاضل التام للدالة $f(x,y)$ هو $dF(x,y)=\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy$
الطرف الأيمن يسمى تفاضل تام ، وإذا ساوى صفر تسمى المعادلة معادلة تامة ويكون حلها العام هو $F(x,y)=c$ حيث c ثابت اختياري .

$$\frac{\partial F}{\partial x}=M \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial y}=N$$

إن الشرط الضروري والكافي لكي تكون المعادلة التفاضلية $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ تامة هو $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$

مثال : حل المعادلة التفاضلية $(4x-2y+5)dx+(2y-2x)dy=0$

الحل : معادلة تفاضلية تامة لان

$$\frac{\partial M}{\partial y}=-2$$
$$\frac{\partial N}{\partial x}=-2$$
$$\therefore \frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

$$M=\frac{\partial F}{\partial x}=4x-2y+5$$

$$F(x,y)=\int_x (4x-2y+5)dx+g(y)$$ تكامل بالنسبة الى X.

$$\therefore F(x,y)=2x^2-2yx+5x+g(y) \text{ ——— } (*)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=-2x+g'(y)=N$$ نشتق بالنسبة الى y.

$$-2x+g'(y)=2y-2x$$ نعوض عن $N=\frac{\partial F}{\partial y}$

$$g'(y)=2y$$

$$g(y)=y^2+c_1$$ تكامل بالنسبة الى y

نعوض في المعادلة (*)

$$F(x,y)=2x^2-2yx+5x+y^2+c_1=c$$ لدينا $F(x,y)=c$,

$$2x^2-2xy+5x+y^2=c_2 \quad , \quad c_2=c-c_1$$

مثال : حل المعادلة التفاضلية $(x^2-2xy-y^2)dx-(x+y)^2dy=0$

الحل :

Sol:

$$M(x,y)=x^2-2xy-y^2, \quad N(x,y)=-(x+y)^2$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=-2x-2y \quad , \quad \frac{\partial N}{\partial x}=-2x-2y$$

$$M=\frac{\partial F}{\partial x}=(x^2-2xy-y^2)$$

$$F(x,y)=\int_x (x^2-2xy-y^2)dx+g(y)$$

$$F(x,y)=\frac{x^3}{3}-x^2y-xy^2+g(y) \text{ ——— } (*)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=-x^2-2xy+g'(y)=N$$

$$\cancel{-x^2}-\cancel{2xy}+g'(y)=\cancel{-x^2}-\cancel{2xy}-y^2$$

$$g'(y)=-y^2$$

$$g(y)=-\frac{y^3}{3}+c_1$$ نعوض في (*)

$$F(x,y)=\frac{x^3}{3}-x^2y-xy^2-\frac{y^3}{3}+c_1=c, \quad F(x,y)=c$$ لدينا

$$\frac{x^3}{3}-x^2y-xy^2-\frac{y^3}{3}=c_2 \quad , c_2=c-c_1.$$