المعادلات التفاضلية الاعتيادية

المعادلة التفاضلية:- هي جملة رياضية تحوي علـــى المســـاواة وتحـــوي علـــى المشـــتقات أو المفاضلات مع الدوال الجبرية والدوال المتسامية.

الدوال الجبرية:- هي كل متعددات الحدود ويفصلها عملية الجمع والطرح ونضربهما.

الدوال المتسامية:- أي غير الجبرية. أي المثلثية أو الزائدية أو اللوغارتمية أو الأسية.

متعددة الحدود

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$$

المفاضلات

$dy, \quad dx, \quad dz$

مشتقة من الدرجة الأولى

$$y' = \frac{dy}{dx} = Dy$$

مشتقة من الدرجة الثانية

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = D^2 y$$

الرتبة (order):- هي أعلى مشتقة تظهر في المعادلة.

الدرجة (degree):- هي القوة الجبرية لأعلى مشتقة (أس أعلى مشتقة).

Examples:

1) $y'' - x^2 y' = \cos x$ معادلة من الدرجة الأولى والرتبة الثانية

2) $\dfrac{dy}{dx} = x^2 + 3$ معادلة من الدرجة الأولى والرتبة الأولى

3) $$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 + 2\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx^2} + x^2\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

معادلة من الدرجة الثانية والرتبة الثالثة

4) $$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^3 - 3\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 + 2y = 1$$

معادلة من الدرجة الثالثة والرتبة الثالثة.

****

ملاحظة:– لكل معادلة رتبة ولكن ليس لكل معادلة درجة. لأنها تكون آسية فلا يمكن اخذ درجة لها وإنما يمكن نشرها نشر متسلسلة تيلر.

$$\sin y' = y^2 - 1$$

معادلة من الرتبة الأولى ولا توجد لها درجة لأنها ترتبط بالزاوية المثلثية.

$$\cos x = 1 + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \cdots$$ نشر تيلر لـــ

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$ نشر تيلر لـــ

$$\sin y' = y' - \frac{1}{3!}(y')^3 + \frac{1}{5!}(y')^5 - \cdots$$

$$y' - \frac{1}{3!}(y')^3 + \frac{1}{5!}(y')^5 - \cdots = y^2 - 1$$

****

Example:-

$$\sqrt[3]{(y'')^2} = \sqrt{1+(y')^2}$$

$$\left((y'')^{\frac{2}{3}}\right)^2 = \left(\left(1+(y')^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2$$

$$\left((y'')^{\frac{2}{3}}\right)^{2\cdot 3} = 1+(y')^2$$

$$\left((y'')^{\frac{2}{3}}\right)^6 = \left(1+(y')^2\right)^3 \Rightarrow (y'')^4 = \left(1+(y')^2\right)^3$$

&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&

أنواع المعادلات:-

١- المعادلات التفاضلية الاعتيادية: Ordinary Differential Equations

وهي المعادلات التي تحوي على متغير مستقل واحد.

٢- المعادلات التفاضلية الجزئية: Partial Differential Equations

وهي المعادلات التي تحوي على أكثر من متغير مستقل واحد.

ملاحظة : ds, dx, dy هي المفاضلات وتكون دائماً عبارة عن معادلة تفاضلية اعتيادية

$$x^2 y dy - (2x+1)dx = e^x dy$$

****

واجب:- بين المعادلة التالية من أي درجة وأي رتبة والمعادلة هي

$$e^{y''} - Zy' + \cos y = o$$

****

تعريف حل المعادلة التفاضلية:- هو علاقة بين مجموعتين بحيث أن كل عنصر لـــه صورة وحيدة في المجال المقابل وتتحقق بثلاثة شروط:

١- أن تحقق المعادلة.

٢- خالية من المشتقات.

٣- أن يكون ضمن مدى تعريف المعادلة نفسها أي لها نفس المجال.

أنواع الحلول:-

١- الحل العام لمعادلة تفاضلية General Solution of Differential Equation

يجب في الحل أن يحوي ثوابت اختيارية تساوي عدد الرتبة

المعادلة الأصلية $y''+y=o$ $\longleftrightarrow$ $y=c_1\cos y+c_2\sin y$

الحل العام

$$c_1,c_2\in R \Rightarrow c_1=0 \quad ,c_2=1$$

حل خاص $\therefore y=\sin y$

وإذا كان $c_1=1 \quad ,c_2=\sqrt{3}$

فإن الحل خاص هو $y=\cos y+\sqrt{3}\sin y.$

وعة حلول المعادلة العامة هي مجموعة منحنيات التكامل.

-الحل الخاص يأتي بعد الحل العام.

-أن يكون الحل مستقل خطيا.

-بعبارة هندسية لكلمة مستقل خطيا. أي لا يوجد ميلين متقاطعين أي غير مشـــتركين بنقطة واحدة.

أو يتقاطعان بمجموعة لا نهائية من النقاط. أي تنطبق عليها.

-دالة sin , cos هي مستقلة لان محددها يساوي واحد وليس صفرا.

&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&

Examples:-

١- أثبت أن $Iny+\frac{x}{y}=c$ هو حل المعادلة التفاضلية التالية:

$$(y-x)\frac{dy}{dx}+y=0\,.$$

Solution:-

$$\ln y+\frac{x}{y}=c$$

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{y(1)-x.\frac{dy}{dx}}{y^{2}}=0$$

$$\frac{1}{y}\cdot y'+\frac{y-xy'}{y^{2}}=0$$

$$\frac{1}{y}\cdot y'+\frac{1}{y}-\frac{xy'}{y^{2}}=0\Rightarrow\left(\frac{1}{y}-\frac{x}{y^{2}}\right)y'=\frac{-1}{y}$$

$$y'=\frac{\frac{-1}{y}}{\frac{1}{y}-\frac{x}{y^{2}}}$$

$$\therefore y'=\frac{\frac{-1}{y}}{\frac{y-x}{y^{2}}}=\frac{-y}{y-x}$$

$$(y-x)\frac{dy}{dx}+y=0.$$

&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&

٢− بين أن $y=A\sin 5x+B\cos 5x$ حيث إن A,B ثوابت اختيارية، هو حل

عام للمعادلة التفاضلية $y''+25y=0$.

Solution:

$$y' = 5A\cos 5x - 5B\sin 5x$$
$$y'' = -25A\sin 5x - 25B\cos 5x$$
$$y'' = -25(A\sin 5x + B\cos 5x)$$

$$y'' + 25y = 0.$$

$$-25(A\sin 5x + B\cos 5x) + 25(A\sin 5x + B\cos 5x) = 0.$$

وهذه المعادلة الأخيرة هي كتحقيق للحل .

&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&

٣− اثبت أن $Z = ax + a^2y^2 + b$ هو حل المعادلة الجزئية $\frac{\partial Z}{\partial y} = 2y\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)^2$.

Solution:

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = 2a^2 y \qquad \frac{\partial Z}{\partial x} = a$$

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = 2y\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)^2 \xrightarrow{\text{نعوض}} = 2a^2 y$$

&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&