حل المعادلات التفاضلية من الرتبة الاولى والدرجة الاولى

١- طريقة فصل المتغيرات:

$$h(x)dx + g(y)dy = 0$$

$$\int h(x)dx + \int g(y)dy = c$$

بعد التكامل نحصل على الحل العام

مثال:

$$y' = x$$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = x$$

$$dy = x\,dx$$

$$\int dy = \int x\,dx$$

$$y = \frac{x^2}{2} + c$$

مثال:

$$y' = y$$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = y$$

$$\frac{dy}{y} = dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int dx$$

$$\ln y = x + c$$

$$e^{\ln y} = e^{x+c}$$

$$y = e^{x} \cdot e^{c}$$

$$y = c\,e^{x}$$

مثال:

$$y' = \frac{x+1}{y^4+1}$$

الحل

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+1}{y^4+1}$$

$$(x+1)\,dx = (y^4+1)\,dy$$

$$\int (x+1)\,dx = \int (y^4+1)\,dy$$

$$\int x\,dx + \int dx - \int y^4\,dy - \int dy = 0$$

$$\frac{x^2}{2} + x - \frac{y^5}{5} - y = C$$

واجب:

① $xy\,dy + (2x^2-1)(y+2)\,dx = 0$

② $y' = e^{2x+y}$

ج- المعادلات التفاضلية من النوع المتجانس

يقال ان $f(x)$ أو $g(x,y)$ بانها متجانسة اذا حققت الشرط التالي

معادلة متجانسة من الدرجة n $\quad f(tx) = t^n f(x)$

مثال:

$f(x) = x^3$

$f(tx) = (tx)^3 = t^3 x^3 = t^3 f(x)$

معادلة متجانسة من الدرجة الثالثة

مثال:

$g(x,y) = x^2 + y^2$

$g(tx,ty) = (tx)^2 + (ty)^2 = t^2x^2 + t^2y^2 = t^2(x^2+y^2) = t^2 g(x,y)$

مثال:

$f(x,y) = x^3 + xy$

$f(tx,ty) = (tx)^3 + (tx)(ty) = t^3x^3 + t^2xy$

$= t^2(tx^3 + xy)$

الدالة f غير متجانسة لانها لم تحقق شرط التجانس

الصيغة العامة للمعادلة المتجانسة

الصيغة العامة للمعادلة المتجانسة هي

$$y = vx$$

$$\Longrightarrow dy = v\,dx + x\,dv$$

مثال: حل المعادلة التفاضلية

$$(2xy + y^2)\,dx - 2x^2\,dy = 0$$

الحل: المعادلة التفاضلية معادلة متجانسة من الدرجة الثانية

نفرض: $y = vx$

$\therefore\ dy = v\,dx + x\,dv$

$$\left[2x(vx) + (vx)^2\right]dx - (2x^2)(v\,dx + x\,dv) = 0$$

$$(2x^2v + v^2x^2)\,dx - 2x^2v\,dx - 2x^3\,dv = 0$$

$$\cancel{2x^2v\,dx} + v^2x^2\,dx - \cancel{2x^2v\,dx} - 2x^3\,dv = 0$$

$$v^2x^2\,dx - 2x^3\,dv = 0 \quad \Big] \div v^2x^3$$

$$\frac{dx}{x} - \frac{2}{v^2}\,dv = 0$$

$$\int \frac{dx}{x} - \int \frac{2}{v^2}\,dv = 0$$

$$\ln x - \frac{2}{v} = C$$

since $y = vx \Longrightarrow v = \frac{y}{x}$

$$\ln x + \frac{2x}{y} = C$$

مثال: جد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$2xy\,dx + (x^2 - y^2)\,dy = 0$$

الحل: معادلة متجانسة من الدرجة الثانية، نفرض ان

$$y = vx \Longrightarrow dy = v\,dx + x\,dv$$

$$2x(vx)dx + (x^2 - (vx)^2)[v\,dx + x\,dv] = 0$$

$$2x^2v\,dx + [x^2 - v^2x^2][v\,dx + x\,dv] = 0$$

$$2x^2v\,dx + x^2v\,dx + x^3dv - v^3x^2dx - v^2x^3dv = 0$$

$$3x^2v\,dx + x^3dv - v^3x^2dx - v^2x^3dv = 0$$

$$(3x^2v - v^3x^2)dx + (x^3 - v^2x^3)dv = 0$$

$$x^2(3v - v^3)dx + x^3(1 - v^2)dv = 0 \;]\div x^3(3v - v^3)$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{(1 - v^2)}{(3v - v^3)}dv = 0$$

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{(1 - v^2)}{(3v - v^3)}dv = c$$