محاضرة 6

مثال: حل المعادلة التفاضلية التالية $(x+y-3)dx+(x+y+4)dy=0$

الحل: نفرض ان $Z=x+y \Longrightarrow dz=dx+dy$

$\therefore y=z-x \Longrightarrow dy=dz-dx$

$(z-3)dx+(z+4)(dz-dx)=0$

$\cancel{z dx}-3dx+z dz-\cancel{z dx}+4dz-4dx=0$

$-7dx+(z+4)dz=0$

$-7x+\frac{z^2}{2}+4z=C \;]*-2$

$14x-z^2-8z=-2C$

$14x-(x+y)^2-8(x+y)=-2C$

مثال: حل المعادلة التفاضلية التالية $2dx+(2x+3y)dy=0$

الحل: نفرض ان $z=2x+3y \Longrightarrow dz=2dx+3dy$

$dy=\frac{dz-2dx}{3}$

$2dx+z\left(\frac{dz-2dx}{3}\right)=0 \;]*3$

$$6dx + zdz - 2zdx = 0$$

$$(6-2z)dx + zdz = 0$$

$$2(3-z)dx + zdz = 0 \quad] \div (3-z)$$

$$2dx + \frac{z}{3-z}\,dz = 0$$

$$2dx - \frac{z}{z-3}\,dz = 0$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ z-3 \overline{)\, z \quad} \\ -z \pm 3 \\ \hline 0+3 \end{array}$$

$$2dx - dz - \frac{3}{z-3}\,dz = 0$$

$$2dx - \left(1 + \frac{3}{z-3}\right)dz = 0$$

$$2x - z - 3\ln(z-3) = C$$

$$\cancel{2x} - (\cancel{2x} + 3y) - \ln(2x+3y-3)^3 = C$$

$$-3y - \ln(2x+3y-3)^3 = C$$

واجب: حل المعادلة التفاضلية $(x+y)dx + (x+y-2)dy = 0$

مثال: جد المعادلة التفاضلية التي مجموعة حلها العام هي مجموعة معادلات الدوائر التي مراكزها تقع على المستقيم $x=y$ ونصف قطر كل منها يساوي واحد؟

الحل: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

بما أن مراكزها على المستقيم $y=x$ اذن $a=b=c$

25

محاضرة 6

$$(x-c)^2+(y-c)^2=1 \quad — \quad (*)$$

$$\left[2(x-c)(1)+2(y-c)(1)y'=0\right]\div 2$$

$$+x-c+yy'-cy'=0$$

$$c+cy'=x+yy'$$

$$c=\frac{x+yy'}{1+y'} \quad \text{نعوض في } (*) \qquad 1+y'\neq 0$$

$$\left[\left(x-\frac{x+yy'}{1+y'}\right)^2+\left(y-\frac{x+yy'}{1+y'}\right)^2\right]=1$$

$$\left(\frac{x+xy'-x-yy'}{1+y'}\right)^2+\left(\frac{y+yy'-x-yy'}{1+y'}\right)^2=1$$

$$\left(\frac{xy'-yy'}{1+y'}\right)^2+\left(\frac{y-x}{1+y'}\right)^2=1$$

$$\left[\frac{(y'(x-y))^2}{(1+y')^2}+\frac{(y-x)^2}{(1+y')^2}=1\right]\times(1+y')^2$$

$$y'^2(x-y)^2+(y-x)^2=(1+y')^2$$

$$(y-x)^2\,(1+y'^2)=(1+y')^2$$

وهي معادلة تفاضلية في الرتبة الأولى .

مثال: جد المعادلة التفاضلية التي حلها العام هو مجموعة كل الدوائر التي تقع مراكزها على المستقيم $y=0$ ونصف قطرها 5 ؟

الحل:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

بما ان مراكزها تقع على المستقيم $y=0$ اذن $b=0$

$$(x-c)^2+(y-0)^2=(5)^2$$

$$(x-c)^2+y^2=25$$

$$\left[2(x-c)+2y\frac{dy}{dx}=0\right]\div 2$$

$$(x-c)+y\frac{dy}{dx}=0$$

$$c=x+yy'$$

$$[x-(\cancel{x}+yy')]^2+y^2=25$$

$$\boxed{(yy')^2+y^2=25}$$ المعادلة التفاضلية

مثال: حل المعادلة التفاضلية

$$\frac{y\,dx - x\,dy}{x^2} = 0$$

الحل:

$$\underbrace{\frac{y}{x^2}}_{M}dx - \underbrace{\frac{1}{x}}_{N}dy = 0$$

تامة

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{1}{x^2} \quad , \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{1}{x^2} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} .$$

$$N = \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{x}$$

$$F(x,y) = \int_y \left(-\frac{1}{x}\right)dy + h(x)$$

$$F(x,y) = \frac{-y}{x} + h(x) \quad \text{———} \; \textcircled{*}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{x^2} + h'(x) = M$$

$$\frac{\cancel{y}}{\cancel{x^2}} = \frac{\cancel{y}}{\cancel{x^2}} + h'(x) \Longrightarrow h'(x) = 0$$

$$h(x) = C_1$$

$$f(x,y) = \frac{-y}{x} + C_1 = C$$

$$\frac{-y}{x} = C_2 \quad , \quad C_2 = C - C_1$$

مثال: حل المعادلة التفاضلية $\underbrace{(x-1)^{-1} y}_{M} dx + \underbrace{\left[\ln(2x-2) + \frac{1}{y}\right]}_{N} dy = 0$

الحل:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = (x-1)^{-1} \quad , \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{1}{2x-2} \cdot 2 = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}(x-1)} = \frac{1}{(x-1)}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$ ∴ المعادلة تامة

$$M = \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{(x-1)} y$$

$$F(x,y) = \int_x \frac{y}{(x-1)} dx + g(y)$$

$$F(x,y) = \ln(x-1)\, y + g(y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \ln(x-1) + g'(y) = N$$

$$\ln(2x-2) + \frac{1}{y} = \ln(x-1) + g'(y)$$

$$\ln 2(x-1) + \frac{1}{y} = \ln(x-1) + g'(y)$$

$$g'(y) = \cancel{\ln(x-1)} + \ln 2 - \cancel{\ln(x-1)} + \frac{1}{y}$$

$$g'(y) = \ln 2 + \frac{1}{y}$$

$$g(y) = (\ln 2)y + \ln y + C_1$$

$$f(x,y) = \ln(x-1)\,y + (\ln 2)y + \ln y + C_1 = C$$

$$\boxed{\ln(x-1)\,y + (\ln 2)y + \ln y = C_2}\ ,\ C_2 = C - C_1$$

مثال: حل المعادلة التفاضلية

$$e^{2x}(dy + 2y\,dx) = x^2\,dx$$

الحل:

$$e^{2x}dy + 2ye^{2x}dx - x^2dx = 0$$

$$\underbrace{e^{2x}}_{N}dy + \underbrace{(2ye^{2x} - x^2)}_{M}dx = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2e^{2x}\ ,\ \frac{\partial N}{\partial x} = 2e^{2x} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$ المعادلة تامة

$$N = \frac{\partial f}{\partial y} = e^{2x}$$

$$F(x,y) = \int_y e^{2x}\, dy + h(x)$$

$$F(x,y) = e^{2x} y + h(x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2y e^{2x} + h'(x) = M$$

$$\cancel{2y e^{2x}} - x^2 = \cancel{2y e^{2x}} + h'(x)$$

$$h'(x) = -x^2 \Longrightarrow h(x) = -\frac{x^3}{3} + C_1$$

$$F(x,y) = e^{2x} y - \frac{x^3}{3} + C_1 = C$$

$$e^{2x} y - \frac{x^3}{3} = C_2 \,,\quad C_2 = C - C_1 \,.$$