2-10

العوامل المكاملة

عند ضرب طرفي معادلة تفاضلية غير تامة بعامل ما وتتحول الى تامة يسمى هذا العامل بعامل التكامل لتلك المعادلة.

بصورة عامة يمكن تحويل $xdy - ydx$ الى تفاضل تام بقسمته على احد المقادير الاتية

$$x^2 ,\ y^2 ,\ xy ,\ x^2+y^2 ,\ (x^2-y^2) ,\ (ax^2+bxy+cy^2)$$

كما يمكن تحويل $pydx+qxdy$ الى تفاضل تام قابل للتكامل اذا ضرب ب

$$x^{p-1}y^{q-1}$$

مثال: حل المعادلة التفاضلية $xdy+2ydx = x^3y^3dy$

الحل:

$$p=2 ,\ q=1 \Rightarrow I.F = x^{2-1}\cdot y^{1-1} = x^1\cdot y^0 = x$$

$$x\left[xdy+2ydx = x^3y^3dy\right] \Rightarrow x^2dy+2xydx = x^4y^3dy$$

$$d(x^2y) = x^4y^3dy$$

$$\text{Let } z = x^2y \Rightarrow x^2 = \frac{z}{y}$$

$$dz = \left(\frac{z}{y}\right)^2 y^3 dy \Rightarrow dz = \frac{z^2}{y^2}y^3dy \Rightarrow \frac{dz}{z^2} = y\,dy$$

$$-\frac{1}{z} = \frac{y^2}{2}+c \Rightarrow -\frac{1}{x^2y} = \frac{y^2}{2}+c$$

مثال: حل المعادلة التفاضلية $x\,dy - y\,dx = (xy)^{\frac{1}{2}}\,dx$

الحل: $x\,dy - y\,dx = (xy)^{\frac{1}{2}}\,dx \;\Big]\div x^2$

$$\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2} = \frac{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}}{x^2}\,dx$$

$$d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}}{x^2}\,dx$$

$$\text{Let } z = \frac{y}{x} \Longrightarrow y = zx$$

$$dz = \frac{x^{\frac{1}{2}}(zx)^{\frac{1}{2}}}{x^2}\,dx \Longrightarrow dz = \frac{x\,z^{\frac{1}{2}}}{x^2}\,dx$$

$$\frac{dz}{z^{\frac{1}{2}}} = \frac{dx}{x} \Longrightarrow \frac{z^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = \ln x + C$$

$$2\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{2}} = \ln x + C$$

مثال: حل المعادلة التفاضلية $x\,dy - y\,dx = y^3(x^2+y^2)\,dy$

الحل: $x\,dy - y\,dx = y^3(x^2+y^2)\,dy \;\Big]\div (x^2+y^2)$

$$\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2} = y^3\,dy \Longrightarrow d\left(\tan^{-1}\frac{y}{x}\right) = y^3\,dy$$

$$\tan^{-1}\frac{y}{x} = \frac{y^4}{4} + C$$

2-10

مثال: حل المعادلة التفاضلية $xdy - ydx = (x^2 + xy - 2y^2)dx$

الحل: Let $a=1$, $b=1$, $c=-2$

$$\Longrightarrow I.F. = (x^2 + xy - 2y^2)$$

$$\left. xdy - ydx = (x^2+xy-2y^2)dx \right] \div (x^2+xy-2y^2)$$

$$\frac{xdy - ydx}{x^2+xy-2y^2} = dx \Longrightarrow \frac{xdy-ydx}{x^2\left(1+\frac{y}{x}-2\frac{y^2}{x^2}\right)} = dx$$

$$\frac{\frac{xdy-ydx}{x^2}}{1+\frac{y}{x}-2\frac{y^2}{x^2}} = dx \Longrightarrow \frac{d\left(\frac{y}{x}\right)}{1+\frac{y}{x}-2\frac{y^2}{x^2}} = dx$$

$$\text{Let } z = \frac{y}{x} \Longrightarrow \frac{dz}{1+z-2z^2} = dx$$

$$\frac{1}{1+z-2z^2} = \frac{1}{(1+2z)(1-z)} = \frac{A}{1+2z} + \frac{B}{1-z} =$$

$$\frac{A(1-z)+B(1+2z)}{(1+2z)(1-z)} = \frac{A-Az+B+2Bz}{(1+2z)(1-z)} \Longrightarrow$$

$$1 = (A+B) + z(2B-A)$$

$$A+B=1$$
$$2B-A=0 \Longrightarrow A=2B$$

$$3B = 1 \Longrightarrow B = \frac{1}{3} \Rightarrow A = \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{(1+2z)(1-z)} = \frac{\frac{2}{3}}{(1+2z)} + \frac{\frac{1}{3}}{(1-z)} \Longrightarrow$$

$$\frac{dz}{1+z-2z^2} = \frac{\frac{2}{3}dz}{(1+2z)} + \frac{\frac{1}{3}dz}{(1-z)} = dx$$

$$\frac{1}{3}\ln(1+2z) - \frac{1}{3}\ln(1-z) = x + c \,]\times 3$$

$$\ln(1+2z) - \ln(1-z) = 3x + 3c$$

$$\ln\frac{(1+2z)}{(1-z)} = 3x + 3c \Longrightarrow e^{\ln\frac{(1+2z)}{(1-z)}} = e^{3x+3c}$$

$$\frac{(1+2z)}{(1-z)} = e^{3x} \cdot e^{3c} = c_1 e^{3x} \quad , \quad c_1 = e^{3c}$$

$$\frac{1+2\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}} = c_1 e^{3x}$$

مثال: إذا كان $u(x,y)$ هو العامل التكاملي للمعادلة التفاضلية

$$M\,dx + N\,dy = 0$$

برهن على صحة ما يلي :

أ- اذا كان

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = N f(x)$$

فان

$$u = e^{\int f(x)\,dx}$$

2-10

ف- اذا كان $\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = M f(y)$
فان

$$u = e^{\int f(y)\,dy}$$

ج- اذا كان $\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = N \frac{K}{x}$
فان

$$u = x^{K}$$

د- اذا كان $\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = M \frac{K}{y}$
فان

$$u = y^{-K} \;.$$

البرهان (الاول) $M\,dx + N\,dy = 0$

$$M e^{\int f(x)dx} dx + N e^{\int f(x)dx} dy = 0$$

$$\frac{\partial M^*}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(M e^{\int f(x)\,dx}\right) = M \cdot 0 + u \frac{\partial M}{\partial y} = u \frac{\partial M}{\partial y}$$

$$\frac{\partial N^*}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(N e^{\int f(x)\,dx}\right) = N u f(x) + u \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$= u\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) + u \frac{\partial N}{\partial x} = u \frac{\partial M}{\partial y}$$

$\therefore$ المعادلة تامة $\frac{\partial M^*}{\partial y} = \frac{\partial N^*}{\partial x}$
و $u = e^{\int f(x)dx}$ هو العامل المكامل

مثال: حل المعادلة التفاضلية $(3xy^3+4y)dx+(3x^2y^2+2x)dy=0$

الحل:

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=(9xy^2+4)-(6xy^2+2)$$

$$=9xy^2+4-6xy^2-2=3xy^2+2$$

$$=(3x^2y^2+2x)\frac{1}{x}=N\frac{1}{x}$$

$$u=x^K=x$$

$$u(3xy^3+4y)dx+(3x^2y^2+2x)dy=0$$

$$(3x^2y^3+4xy)dx+(3x^3y^2+2x^2)dy=0$$

معادلة تفاضلية تامة

مثال: حل المعادلة التفاضلية $(2xy^2-2y)dx+(3x^2y-4x)dy=0$

الحل:

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=(4xy-2)-(6xy-4)=-2xy+2$$

$$=(-2xy^2+2y)\frac{1}{y}=(2xy^2-2y)\frac{-1}{y}=M\frac{-1}{y}$$

$$\therefore u=y^{-K}=y^{-(-1)}=y^1=y$$

$$y(2xy^2-2y)dx+(3x^2y-4x)dy=0\Longrightarrow(2xy^3-2y^2)dx+(3x^2y^2-4xy)dy$$

معادلة تفاضلية تامة