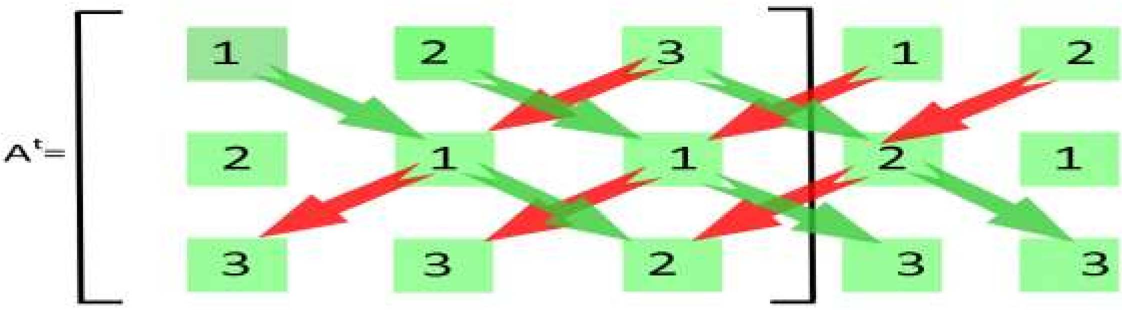
<u>*المحاضرة العاشرة*</u>

<u>*مثال :-*</u>

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{matrix}$$

$$|A| = \begin{matrix} (1)(1)(2) + (2)(3)(3) + (3)(2)(1) \\ -(3)(1)(3) - (1)(3)(1) - (2)(2)(2) \end{matrix}$$

$= 2 + 18 + 6 \ - 9 - 3 - 8 = 6$



$$|A^t| = \begin{matrix} (1)(1)(2) + (2)(1)(3) + (3)(2)(3) \\ -(3)(1)(3) - (1)(1)(3) - (2)(2)(2) \end{matrix}$$

$= 2 + 6 + 18 - 9 - 3 - 8 = 6$

$\therefore |A| = |A^t|$

<u>*مثال :-*</u>باستخدام خواص المحددات المناسبة في حساب محدد المصفوفة A.

$$|A| = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ -4 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & -2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow C_4 \rightarrow C_4 + C_1$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 \\ -4 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1}(3)\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^4(3)(-2)(-20+12) = -48$$

<u>*مثال :-*</u> باستخدام خواص المحدد اوجد قيمة محدد المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 12 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 12 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 12 \end{vmatrix} = 2(12-3) = 2(9) = 18$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 12 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6(4-1) = 6(3) = 18$$

$$\Rightarrow r_1 \to (-1)r_2 + r_1 = \begin{vmatrix} 0 & -4 & 6 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix}$$

✿❀✿❀✿❀✿❀✿❀✿❀✿

مثال :-استخدم العمليات السطرية لتحويل المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 6 & 5 \\ 3 & 6 & -7 \end{bmatrix}$ الى مصفوفة مثلثة

ثم احسب محددها .

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 6 & 5 \\ 3 & 6 & -7 \end{bmatrix} \Rightarrow r_2 \to -2r_1 + r_2$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 11 \\ 3 & 6 & -7 \end{bmatrix} \Rightarrow r_3 \to -3r_1 + r_3$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 11 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore |A| = (1)(2)(2) = 4$$

✿❀✿❀✿❀✿❀✿❀✿❀✿

مبرهنة :- اذا كان بالامكان اخراج من كل سطر (عمود) عامل مشترك فان محدد المصفوفة

$$|KA| = k^n|A|$$

مثال :- لتكن $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

$$A + B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$$

$$|A + B| = 23 \ , |A| = 1 \ , |B| = 8$$

نجد ان

$$|A + B| \neq |A| + |B|$$

$$|AB| = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 11 & 17 \end{vmatrix} = 85 - 77 = 8$$

$$|A||B| = 8.1 = 8$$

$$\therefore |AB| = |A||B|$$

خاصية :- اذا كانت المصفوفة A , B مصفوفتين مربعتين لهما نفس السعة فان

$$|AB| = |B||A|$$

مبرهنة :- اذا كانت المصفوفة A قابلة للانعكاس اذا و فقط اذا $|A| \neq 0$

نتيجة :- اذا كانت A مصفوفة مربعة قابلة للانعكاس

فان : $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

مثال :- $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = -2$

$$|A^{-1}| = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix} \Rightarrow |A^{-1}| = \frac{-1}{2} = \frac{1}{|A|}$$

مثال :- باستخدام خواص المحدد اوجد قيمة محدد المصفوفة

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 3 \\ 2 & 8 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 2(3)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\therefore |A_2| = (2)(3)(0) = 0$$

النشر بالعامل المرافق و تطبيقات

COFACTOR EXPANSION AND APPLICATIONS

تعريف : لتكن $A=a_{ij}$ مصفوفة مربعة وان M_{ij} مصفوفة جزئية من A والناتجة من حذف السطر في الموقع i والعمود j من A يسمى M_{ij} مصغر العنصر a_{ij} من A ويعرف بالعامل المرافق للعنصر a_{ij} والذي يرمز له A_{ij} ويعرف بالشكل التالي

$$\therefore A_{ij} = (-1)^{i+j}|Mij|$$

مثال :- اوجد معكوس المصفوفة

$$A=\begin{bmatrix}3 & -2 & 1\\ 5 & 6 & 2\\ 1 & 0 & -3\end{bmatrix}$$

$$adj(A)=\begin{bmatrix}-18 & -6 & -10\\ 17 & -10 & -1\\ -6 & -2 & 28\end{bmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}.adj(A)=\begin{bmatrix}{}^{18}/_{94} & {}^{6}/_{94} & {}^{10}/_{94}\\ {}^{-17}/_{94} & {}^{10}/_{94} & {}^{1}/_{94}\\ {}^{6}/_{94} & {}^{2}/_{94} & {}^{-28}/_{94}\end{bmatrix}$$

مبرهنة :- اذا كانت A مصفوفة لها معكوس اذا و فقط اذا $|A| \neq 0$.

مبرهنة :-اذا كانت A قابلة للعكس فان معكوسها سيكون وحيدا .

مبرهنة :-اذا كانت A , B مصفوفتين مربعتين من القياس نفسه و قابلتين للعكس فان AB قابلة للعكس و $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

نتيجة :-اذا كانت $A_1, A_2, \dots\dots, A_n$ ***مصفوفات من القياس نفسه و قابلة للعكس فان*** $A_1, A_2, A_3 \dots\dots A_n$ ***تكون قابلة للعكس ايضا .***

مثال :-اذا كانت $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix}$

تحقق $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

الحل:- $AB=\begin{pmatrix}-8 & 1\\ 5 & -5\end{pmatrix}$

نجد معكوس المصفوفتين A^{-1}, B^{-1} ***فان***

$$A^{-1}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}, B^{-1}=\frac{-1}{5}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}$$

$$B^{-1}A^{-1}=\frac{-1}{35}\begin{pmatrix}5 & 1\\ 5 & 8\end{pmatrix}$$

$$(AB)^{-1}=\frac{-1}{35}\begin{pmatrix}5 & 1\\ 5 & 8\end{pmatrix}$$

مثال :- اوجد معكوس المصفوفة (واجب)

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & : & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 3 & : & 0 & 1 & 0\\ 5 & 5 & 1 & : & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} 13/8 & -1/2 & -1/8 \\ -15/8 & 1/2 & 3/8 \\ 5/4 & 0 & -1/4 \end{bmatrix}$$

✿❀✿❀✿❀✿❀✿❀✿❀✿

مثال :- ***اوجد معكوس المصفوفة (واجب)***

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

A ليست لها معكوس

قاعدة كرامر

CRAMER'S RULE

$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=0$

$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=0$

$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=0$

منظومة المعادلات تحتوي على n من المجاهيل . يمكن التعبير عنها بالمعادلة $AX=B$ حيث A مصفوفة المعادلات، X مصفوفة المجاهيل، B مصفوفة الحدود المطلقة .

مبرهنة (قاعة كرمر) :- لتكن $AX=B$ منظومة من n من المعادلات الخطية لها n من المجاهيل بحيث ان $|A| \neq 0$ عندئذ يكون للمنظومة حل وحيد هو

$$x_1=\frac{|A_1|}{|A|}, x_2=\frac{|A_2|}{|A|}, \ldots, x_n=\frac{|A_n|}{|A|}$$

حيث A_j مصفوفة ناتجة من احلال عناصر المصفوفة B محل العمود في الموقع j في المصفوفة A.

لما كان $|A| \neq 0$ فان A لها معكوس (حسب المبرهنة)

$$X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{11}/|A| & A_{21}/|A| & \dots A_{n1}/|A|\\ A_{12}/|A| & A_{22}/|A| & \dots A_{n2}/|A|\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ A_{1n}/|A| & A_{2n}/|A| & \dots A_{nn}/|A|\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{bmatrix}$$

و هذا يعني ان

$$x_1=\frac{A_{1j}}{|A|}b_1+\frac{A_{2j}}{|A|}b_2+\cdots+\frac{A_{nj}}{|A|}b_n$$

و بموجب التعريف يكون

$$A_j=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1} & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots a_{2i-1} & b_2 & a_{2i+1} & a_{2n}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1} & a_{nn}\end{bmatrix}$$

لايجاد $|Ai|$ ننشر المحدد بعناصر العمود في الموقع j نجد ان

$$|A|=A_{1i}b_1+A_{2i}b_2+\cdots+A_{ni}b_n$$

لذلك

$$x_i=\frac{|A_i|}{|A|},(i=1,2,\dots,n)$$