المصفوفات الأوليةو معكوس مصفوفة

ELEMENTARY MATRICES،A MATRIXOFINVERSE

سوف نستعرض في هذا البند تنسيقاً بسيطاً لإيجاد معكوس مصفوفة .

تعريف:– العمليات السطرية الأولية على مصفوفة هي :- Elementary row (operations)

a) ضرب عناصر أي سطر بعدد غير صفري .

b) تبادل موضعي أي سطرين .

c)إضافة مضروب أي سطر بقياس إلى سطر آخر.

تعريف:– المصفوفة الأولية (Elementary matrix): هي مصفوفة مربعة سعة (**n**)

يمكن تكوينها من المصفوفة المحايدة (**In**) بواسطة عملية واحدة من العمليات السطرية الأولية .

أدناه أمثلة على مصفوفات أولية وعمليات تكوينها .

مثال:–(١)

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} , E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} , E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

اضافة ٣ أضعاف السطر الثالث إلى السطر الأول — تبادل السطرين الثاني و الرابع من (I_4) — ضرب السطر الثاني من (I_2) بـ-3

(المصفوفات الاولية و معكوس المصفوفة)

عند ضرب مصفوفة A من اليسار المصفوفة أولية E يكون تأثيره معادلاً لإجراء عملية سطريه أولية على A .

سوف نرمز لسطور المصفوفة بالرمز ri وعندما نكتب $r_i \rightarrow cr_j + r_i$ تعني أن السطر في الموقع **i** قد أستبدل بمضروب السطر في الموقع **j** بثابت **c** مضافاً إليه السطر في الموقع
.c ≠0, i

ففي المثال (١) سنرمز للعمليات التي أجريت على كل من E1 و E2 و E3 بالشكل :-

$\mathbf{r_2 \rightarrow (-3)\, r_2}$ و $\mathbf{r_1 \rightarrow 3r_3}$ على التوالي

مثال :- تأمل المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

وتأمل المصفوفة الأولية

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

الناتجة من إضافة (٣) أضعاف السطر الأول إلى السطر الثالث من المصفوفة المحايدة (I_3) أي أن $r_3 \rightarrow 3r_1 + r_3$

(المصفوفات الاولية و معكوس المصفوفة)

أن الضرب

$$EA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 6 \\ 4 & 4 & 10 & 9 \end{bmatrix}$$

يعطي المصفوفة الناتجة من إضافة ٣ أضعاف السطر الأول في **A** إلى السطر الثالث من المصفوفة **A** .

تعريف:- اذا كانت A مصفوفة مربعة و كانت B مصفوفة تحقق العلاقات

$AB = I = BA$

حيث I المصفوفة المحايدة ، عندئذ يقال للمصفوفة A بانها قابلة للانعكاس (Convertible) و يطلق على المصفوفة B معكوس A و يرمز للمعكوس بالرمز A^{-1} .

تعريف:- يقال للمصفوفة A بانها تحقق الصيغة المدرجة السطرية المختزلة (Reduced ro-Echelonform) اذا تحقق الشروط الاتية:-

١- اذا لم تكن جميع عناصر السطر اصفاراً فأن اول عنصر غير صفري هو 1 (يطلق عليه الدليل)

٢- اذا وجدت سطور كل عناصرها اصفار فأن هذه السطور كافة تقع في الجهة السفلى من المصفوفة.

٣- في أي سطرين متتاليين ليست جميع عناصر كل منهما اصفاراً ، الدليل 1 للسطر الاسفل يكون ابعد الى اليمين من الدليل 1 للسطر الاعلى منة .

٤- كل عمود يحوي الدليل 1 تكون عناصره الاخرى اصفاراً .

(المصفوفات الاولية و معكوس المصفوفة)

ملاحظة:-

في المصفوفة بالصيغة المدرجة السطرية تكون جميع العناصر التي تقع تحت كل دليل 1 اصفاراً .اما في المصفوفة بالصيغة المدرجة السطرية المختزلة تكون جميع العناصر التي تقع فوق و تحت كل دليل 1 اصفاراً.

ملاحظة:-

المصفوفة الغير مربعة ليست لها معكوس .

ملاحظة:-

لحساب معكوس المصفوفة A نجري على المصفوفة A بعض العمليات السطرية الاولية حتى نصل الى المصفوفة المحايدة و نجري نفس العمليات السطرية السابقة على المصفوقة المحايدة فعندما نحصل على المصفوفة المحايدة نكون قد حصلنا على معكوس المصفوفة A.

مثال :- جد معكوس المصفوفة

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

الحل:-

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[-R_1+R_3]{-2R_1+R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-R_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)\xrightarrow[-R_2+R_3]{-R_2+R_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-1/4R_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & -2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3/4 & -1/4 & -1/4 \end{array}\right)\xrightarrow[-4R_3+R_2]{2R_3+R_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3/4 & -1/4 & -1/4 \end{array}\right)$$

$$\therefore A^{-1}=\begin{pmatrix} 1/2 & 1 & -1/2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3/4 & -1/2 & -1/4 \end{pmatrix}$$