

(حذف كاوس)

GAUSSIAN ELIMINATION

مناهج كاوس

تعريف:- منظومة المعادلات الخطية التي تتكون من m من المعادلات و لها n من المجاهيل يمكن كتابتها بالصيغة العامة :

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

و يمكن كتابتها على شكل مصفوفة :

$$\left[\begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & : & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & : & b_2 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} & : & b_m \end{array} \right]$$

تسمى هذه المصفوفة بالمصفوفة الممتدة $[A : B]$ لهذه المنظومة و يمكن التعبير عنها :

$$[AX = B]$$

مبرهنة:-

لتكن المنظومة $AX=B$ و $CX=D$ منظومتين المعادلات الخطية تتكون كلاهما من m من المعادلات الخطية و لهما n من المجاهيل و اذا كانت المصفوفتان ممتدتان

$$AX=B \quad , \quad CX=D$$

$$[A : B] \quad , \quad [C : D]$$

لهذه المنظومة متكافئتين سطريراً فان المنظومتين لهما الحل نفسه .

حذف كاوس

نتيجة: اذا كانت المصفوفتان A, C سعة كل منهما $m \times n$ متكافئتين سطريا فان منظومة المعادلات الخطية $AX=0, CX=0$ لهما الحل نفسه .

تعريف:- لتكن $AX=B$ منظومة معادلات خطية فان طريقة حل هذه المنظومة على اساس تحويل صفوفها الممتدة $[C : D]$ تسمى طريقة حذف كاوس جوردن (Gauss - Jordan Elimination)

مثال:- حل منظومة المعادلات الخطية بطريقة كاوس جوردن

$$\begin{aligned} X_1 + 2X_2 + 3X_3 &= 9 \\ 2X_1 - X_2 + X_3 &= 8 \\ 3X_1 - X_3 &= 9 \end{aligned}$$

الحل:-

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 2 & -1 & 1 & 8 \\ 3 & 0 & -1 & 9 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{-2r_1 + r_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -5 & -5 & -10 \\ 0 & -6 & -10 & -24 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{-3r_1 + r_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -5 & -5 & -10 \\ 0 & -6 & -10 & -24 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{-1/5} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & -10 & -24 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{-2r_2 + r_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -12 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{6r_2 + r_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -12 \end{array} \right] \end{aligned}$$

حذف كاوس

$$\frac{-1}{4}r_3 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & : & 5 \\ 0 & 1 & 1 & : & 2 \\ 0 & 0 & 1 & : & 3 \end{bmatrix}$$

$$-r_3 + r_1 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & : & 2 \\ 0 & 1 & 0 & : & -1 \\ 0 & 0 & 1 & : & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} & -r_3 + r_2 \\ \therefore & \begin{bmatrix} x_1 = 2 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

∴ مجموعة الحل

تعريف:- يقال لطريقة حل منظومة المعادلات الخطية و ذلك بتحويل مصفوفتها الممتدة

الى الصيغة المدرجة السطرية بطريقة حذف كاوس (Gaussian Elimination)

مثال:- حل منظومة المعادلات الخطية بطريقة حذف كاوس

$$\begin{aligned} X_1 + 2X_2 + 3X_3 &= 6 \\ 2X_1 - 3X_2 + 2X_3 &= 14 \\ 3X_1 - X_2 - X_3 &= -2 \end{aligned}$$

الحل:-

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & : & 6 \\ 2 & -3 & 2 & : & 14 \\ 3 & 1 & -1 & : & -2 \end{bmatrix}$$

$$-2r_1 + r_2 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & : & 6 \\ 0 & -7 & -4 & : & 2 \\ 0 & -5 & -10 & : & -20 \end{bmatrix}$$

$$-3r_1 + r_3$$

حذف كاوس

$$\begin{array}{l} r_2 \rightarrow r_3 \\ \longrightarrow \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -5 & -10 & -20 \\ 0 & -7 & -4 & 2 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} -1/5 r_2 \\ \longrightarrow \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -7 & -4 & 2 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} 7r_2 + r_3 \\ \longrightarrow \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 10 & 3 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} \frac{1}{10} r_3 \\ \longrightarrow \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

$$X_1 + 2X_2 + 3X_3 = 6 \Rightarrow X_1 - 4 + 9 = 6 \Rightarrow X_1 = 1$$

$$X_2 + 2X_3 = 4 \Rightarrow X_2 + 6 = 4 \Rightarrow X_2 = -2$$

$$X_3 = 3$$

$$\therefore \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -2 \\ x_3 = 3 \end{cases}$$

∴ مجموعة الحل :

هو حل وحيد .



المس :- جد حل المعادلات الخطية بطريقة :

١- حذف كاوس

٢- كاوس جوردن

1 -

$$X_1 + X_2 + 2X_3 + 3X_4 = 13$$

$$2X_1 - 2X_2 + X_3 + X_4 = 14$$

$$3X_1 + X_2 + X_3 - X_4 = -2$$

2 -

(حذف كاس)

$$X_1 + X_2 + X_3 = 1$$

$$2X_1 - 2X_2 - 2X_3 = 3$$

$$2X_1 + X_2 + X_3 = -2$$

