

### بعض التعاريف والمفاهيم الأساسية:

#### الدوال التحليلية ( Analytic Functions )

- يقال أن الدالة  $w = f(z)$  تحليلية في النقطة  $z_0$  إذا كانت مشتقة الدالة موجودة ليس فقط في  $z_0$  وإنما في كل نقطة من نقاط جوار ما للنقطة  $z_0$ .
- يقال أن الدالة  $w = f(z)$  تحليلية في المنطقة  $D$  إذا كانت تحليلية في جميع نقاط هذه المنطقة  $D$ .
- يقال أن الدالة  $w = f(z)$  كلية ( Entire function ) إذا كانت تحليلية في جميع نقاط المستوي المعقد.
- إذا كانت الدالة  $f$  تحليلية في بعض نقاط جوار ما لـ  $z_0$  عدا  $z_0$  نفسها فإن النقطة  $z_0$  تسمى نقطة شاذة ( singular point ) للدالة  $f(z)$ . أي أن النقطة الشاذة هي النقطة التي تجعل الدالة غير تحليلية والجوار الذي يحوي النقطة الشاذة يسمى الجوار المحذوف.
- تسمى النقطة  $z_0$  نقطة منعزلة ( Isolated point ) للدالة  $f$  إذا كانت  $z_0$  نقطة شاذة أولاً" وكان يوجد جوار إلى  $z_0$  تكون الدالة تحليلية في كل نقطه من نقاطه عدا  $z_0$  نفسها.
- الدالة تكون تحليلية عند فترة مفتوحة إذا كانت المشتقة المركبة موجودة عند كل نقطة من نقاط المجموعة المفتوحة.

**مثال/** الدالة  $f(z) = \frac{z+1}{z^2(z^2+1)}$  قابلة للاشتقاق في كل نقطة عدا  $z=0$  و  $z = \pm i$  لذا فإن الدالة تحليلية في كل المستوي عدا النقاط أعلاه وهذه النقاط هي تمثل جميع النقاط المفردة للدالة كما إنها نقاط معزولة أيضاً".

#### مثال/

$$w = f(z) = \frac{1+z}{1-z} \quad \text{جد النقاط الشاذة للدالة}$$

#### الحل

$$\frac{dw}{dz} = \frac{2}{(1-z)^2} \quad \text{بما أن}$$

إذا الدالة تحليلية لجميع قيم  $z$  عدا  $z = 1$  وهي النقطة التي عندها تكون المشتقة غير موجودة ، ان النقطة  $z = 1$  هي نقطة شاذة .

### مثال (2)

أن الحدوديات ( Polynomial ) هي دالة تحليلية لجميع نقاط المستوي المعقد ، أي أنها دالة كلية . (أي ان الدالة لا تمتلك نقاط شاذة وبالتالي لا تمتلك جوار محذوف)

### مثال (3)/ واجب

برهن أن الدالة  $f(z) = |z|^2$  قابلة للاشتقاق عند النقطة  $z = 0$  لكنها ليست تحليلية عند النقطة  $z = 0$  .

ملاحظة/ الفرق بين الدالة القابلة للاشتقاق والدالة التحليلية هو ان :

الدالة التحليلية تصف تصرف الدالة في مجموعة مفتوحة، بينما الدالة القابلة للاشتقاق في نقطة معزولة ولكن الدالة تكون غير تحليلية عند تلك النقاط.