

نظرية (الشرط الضروري والكافي لكي تكون الدالة تحليلية)

تكون الدالة $f(z)$ تحليلية في المجال D حيث $D \subseteq \mathbb{C}$ إذا وفقط إذا كانت v هي المرافق التوافقي للدالة u في المجال D .

ملاحظات

1- إذا كانت v المرافق التوافقي للدالة u وكانت u هي المرافق التوافقي للدالة v فإن الدالة الأصلية ثابتة.

2- ليس بالضرورة ان تكون u هي مرافق توافقي للدالة v .

3- إذا كانت u مرافق توافقي بالنسبة الى v فإن الدالة $f(z)$ يمكن كتابتها بالصيغة التالية

$$f(z) = v + iu \text{ وان معادلتي كوشي - ريمان تصبح بالصيغة التالية}$$

$$V_x = U_y, V_y = -U_x$$

تمارين

(1) برهن ان الدالة التالية كلية (تحليلية في جميع النقاط)

$$f(z) = \sin x \cos y + i \cos x \sin y$$

(2) عين النقاط التي لا يكون فيها الدالة التالية تحليلية ثم احسب مشتقة تلك الدالة في بقية

$$f(z) = \frac{z+2}{z^2-4z+5} \quad \text{النقاط}$$

(3) برهن ان الدالة التالية ليست تحليلية في أي نقطة من المستوى المعقد.

$$f(z) = e^y (\cos x + i \sin x)$$

(4) برهن ان الدالة التالية تحقق معادلة لا بلاس وأحسب المرافق التوافقي لها.

$$u = e^x x \cos y - e^x y \sin y$$

(5) برهن ان u دالة توافقية ثم جد المرافق التوافقي v عندما $u = 2x - x^3 + 3xy^2$

(6) استخدم الشرط الضروري لكوشي- ريمان لإثبات أن $f'(z)$ غير موجودة عند أية نقطة في الدوال التالية:

$$1/ f(z) = e^{\bar{z}}$$

$$2/ f(z) = z - \bar{z}$$

$$3/ f(z) = \bar{z}$$

$$4/ f(z) = 2x + i(xy^2)$$

س7) أوجد النقاط التي تكون فيها الدوال التالية قابلة للاشتقاق.

$$f(z) = x^3 - i(y-1)^3 \quad (1)$$

$$f(z) = z \operatorname{Re}(z) + \bar{z} \operatorname{Im}(z) + \bar{z} \quad (2)$$