Harmonic Functions الدوال التوافقية

لتكن $h(x , y)$ دالة حقيقية تعتمد على متغيرين حقيقيين x , y منطلقها فـي المستوي $x\,y$ تسمى h دالة توافقية في ذلك المنطلق إذا كانت مشتقاتها الجزئية الأولى والثانية مستمرة فـي ذلك المنطلق وتحقق المعادلة التالية

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0$$

وتمسى هذه المعادلة بمعادلة لا بلاس (Laplace's Equation)

مبرهنـــة: إذا كانت $f(z) = u(x , y) + i(x , y)$ دالة تحليلية في المنطقة D فـإن الدالتين u, v توافقيتان في D.

مثـــال: أثبت أن $f(x , y) = e^x \cos y$ دالة توافقية

البرهان: بما ان

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^x \cos y \quad ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^x \cos y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -e^x \sin y \quad ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -e^x \cos y$$

$$\therefore \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e^x \cos y + (-e^x \cos y) = 0$$

من الواضح ان المشتقات الجزئية الأولى والثانية للدالة f مـستمرة لأنهـا تركيـب دالتـين مستمرتين وبما ان الدالة f قد حققت معادلة لا بلاس

$\therefore$ f دالة توافقية.

ملاحظة مهمة: اذا كانت $f(z) = u(x , y) + i(x , y)$ دالة تحليلية في D فان كـل مـن u,v دالة توافقية.

المرافق التوافقي Harmonic Conjugate

إذا كانت الدالتان $u(x , y)$, $v(x , y)$ تـوافقيتين فـي المنطقـة D بحيـث ان الدالـــة $f(z) = u(x , y) + i(x , y)$ تحليلية فإن الدالة $v(x , y)$ تسمى المرافـق التوافقي للدالة $u(x, y)$.

مثـــال: جد مرافقا توافقيا $v(x , y)$ للدالة $u(x , y) = e^x \cos y$.

الحـــــــــل

نثبت أولا $u(x, y)$ دالة توافقية أي ان:-

$$u_{yy} = -e^x \cos y \quad , \quad u_y = -e^x \sin y \quad , \quad u_{xx} = e^x \cos y \quad , \quad u_x = e^x \cos y$$

$$\therefore \; u_{xx} + u_{yy} = 0$$

باستخدام معادلتي كوشي – ريمان نحصل على:-

$$u_x = e^x \cos y = v_y$$

$$\therefore \; V = \int v_y \, dy + \phi(x) = \int e^x \cos y dy + \phi(x) = e^x \int \cos y \, dy + \phi(x)$$

بأخذ التكامل بالنسبة لـــ y واعتبار x ثابتة

$$\therefore \; v = e^x \sin y + \phi(x)$$

حيث ان $\phi(x)$ دالة اختيارية تعتمد على x فقط وقابلة للاشتقاق نأخذ المشتقة الجزئية بالنسبة لـــ x بالنسبة لـــ x للمعادلة الأخيرة ونساوي الناتج مع $\frac{-\partial u}{\partial y}$ لأن $v_x = -u_y$ ينتج:

$$v_x = e^x \sin y + \phi'(x) = -u_y = -(e^x(-\sin y))$$

$$\therefore e^x \sin y + \phi'(x) = e^x \sin y$$

$$\therefore \phi'(x) = 0$$

$$\phi(x) = c_1$$

حيث c_1 ثابت معقد اختياري

$\therefore$ المرافق التوافقي هو $\qquad v = e^x \sin y + c_1$

وان الدالة

$$\begin{aligned} f(z) &= e^x \cos y + i(e^x \sin y + c_1) \\ &= e^x(\cos y + i \sin y) + i c_1 \\ &= e^x e^{iy} + c \\ &= e^{x+iy} + c \\ &= e^z + c \end{aligned}$$

حيث $\mathbf{c = \mathit{i}\, c_1}$