ملاحظات

1-إذا حققت الدالتين u ,v معادلتي كوشي – ريمان فهذا لا يعني أن الدالة تكون تحليلية إنما فقط ستكون قابلة للاشتقاق.

2- إذا كانت الدالة تحليلية فيجب أن تتحقق الشروط (1 & 2).

مثال

برهن أن الدالة $f(z) = z^2 + 5iz + 3 - i$ كلية (أي تحليلية في جميع نقاط المستوي) .

الحل/بما ان $z = x + iy$ فأن

$$f(z) = (x^2 - y^2 - 5y + 3) + i(2xy + 5x - 1)$$

أي أن

$$u = x^2 - y^2 - 5y + 3$$

$$v = 2xy + 5x - 1$$

$$u_x = 2x = v_y$$

$$v_x = 2y + 5 = -u_y$$

فالمعادلتين لكوشي ريمان متحققتان ولما كانت المشتقات الجزئية للدالتين u , v مستمرة عندئذ تكون الدالة f (z) تحليلية في جميع نقاط المستوي المعقد وأن

$$f'(z) = 2x + i(2y + 5)$$

$$= 2z + 5i$$

وبذلك تكون الدالة f (z) كلية .

مثال / برهن أن الدالة

$$w = f(z) = |z|^2$$

$$= x^2 + y^2$$

تحقق معادلتي كوشي – ريمان عند النقطة $z = 0$ ولكنها ليست تحليلية عند النقطة $z = 0$

الحل

بما أن $v = 0$; $u = x^2 + y^2$ ينتج

$u_x = 2x$; $u_y = 2y$ $\qquad$ $v_x = 0$; $v_y = 0$

أن معادلتي كوشي ريمان تتحققان عند النقطة $z = 0 + i0$ لكن الدالة $f(z) = |z|^2$ غير تحليلية حسب ما جاء في مثال سابق (ترك واجب).

ملاحظات

(1) الدالة الاسية تحليلية للأسباب التالية:

(*i*) تحقق شرطي كوشي ريمان فإذا كان $e^z = u + i\,v$

وان $u = e^x \cos y$ ، $v = e^x \sin y$

وان $$\frac{dv}{dx} = e^x \cos y = \frac{du}{dx}$$

كذلك $$\frac{dv}{dx} = e^x \sin y = -\frac{du}{dy}$$

(*ii*) ان المشتقات الجزئية في المرتبة الأولى لكل من v, u بالنسبة لـــ *x* ,y هـــي دوال مستمرة وان

$$\frac{d}{dz}(e^z) = e^z$$

وكذلك فإن مشتقة e^z هي نفسها e^z كما ان الدالة تحليلية في جميع نقاط المستوي z وبذلك تؤلف e^z دالة كلية.

(2) إن القيمة الأساسية للدالة اللوغارتمية تحقق شرطي كوشي – ريمان لأنه إذا كان:

$\text{Log}\, z = u + i\,v = \text{Log}\, v + i\,\theta$ فإن $u = \text{Log}\, r$, $v = \theta$

إذا $$\frac{du}{dr} = \frac{1}{r}\frac{dv}{d\theta} = \frac{1}{r} \quad , \quad \frac{dv}{dr} = 0 = -\frac{1}{r}\frac{du}{d\theta}$$