(ضرب المصفوفات)

ضرب المصفوفات :-

يشترط في عملية ضرب مصفوفتين ان يكون عدد الاعمدة في العامل الايسر مساويا الى عددالصفوف في العامل الايمن .

فاذا كانت $A=(a_{ij})$ من القياس $m \times r$ و $B=(b_{ij})$ من القياس $r \times n$ فان جدائهما سيكون مصفوفتين من القياس $m \times n$ و لتكن $AB = C = (c_{ij})$ حيث ان

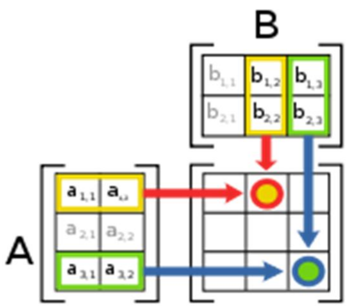
$$C_{ij} = \sum_{K=1}^{n} a_{ik}\, \mathrm{b}_{kj} = \mathrm{a}_{i1}\, \mathrm{b}_{1j} + \mathrm{a}_{i2}\, \mathrm{b}_{2j} + \ \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{in}\, b_{nj}$$

$$i = 1,2, \ldots\ldots\ldots, m$$

$$j = 1,2, \ldots\ldots\ldots, r$$

اي ان عناصر الجداء تحدد كما يأتي :-

العنصر في i و العمود j في مصفوفة الجداء هو العدد الناتج من جميع جداءات عناصر الصف i في المصفوفة A في العناصر المناظرة من العمود j للمصفوفة B .



مثال :- اذا كانت $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$ و $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$,

احسب AB و BA

الحل :- بما ان المصفوفتين من القياس 2×2 نفسه فان المصفوفة AB تكون من القياس 2×2 ايضا و لتوضيح الخطوات سنستخدم المستطيلات الاتية :-

(ضرب المصفوفات)

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$$

$AB =$

الصف الاول × العمود الاول	الصف الاول × العمود الثاني
الصف الاول: $\begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}$ العمود الاول: $\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$	الصف الاول: $\begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}$ العمود الثاني: $\begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$
الصف الثاني: $\begin{bmatrix} 3 & -2 \end{bmatrix}$ العمود الاول: $\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$	الصف الثاني: $\begin{bmatrix} 3 & -2 \end{bmatrix}$ العمود الثاني: $\begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$

$$AB = \begin{bmatrix} (2\times 1)+(-1\times 5) & (2\times 4)+(-1\times -3) \\ (3\times 1)+(-2\times 5) & (3\times 4)+(-2\times -3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 11 \\ -7 & 18 \end{bmatrix}$$

كذلك فأن المصفوفة BA من القياس 2×2 فأن :-

$$BA=\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (1\times 2)+(4\times 3) & (1\times -1)+(4\times -2) \\ (5\times 2)+(-3\times 3) & (5\times -1)+(-3\times -1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 14 & -9 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

مثال :- جد AB,BA اذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 7 & 2 \\ 4 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 5 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

(ضرب المصفوفات)

الحل :-

يمكن ايجاد AB لتساوي عدد الاعمدة في A و عدد الصفوف في B سيكون الناتج مصفوفة من القياس 4× 4 .

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & -15 & -7 & 9 \\ 16 & 10 & -3 & 17 \\ 8 & 0 & -4 & 12 \\ -5 & -5 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

كذلك يمكن ايجاد BA تكون عدد الاعمدة في B مساوياً الى عدد الصفوف في A سيكون الناتج من القياس 2 × 2 .

$$BA = \begin{bmatrix} -8 & -9 \\ 48 & 9 \end{bmatrix}$$

مبرهنة :-

اذا كانت اذا كانت C,B,A ثلاث مصفوفات من القياس نفسه و يمكن اجراء العمليات التالية عليها و كأن a عدداً حقيقيا فأن :-

١- $A(BC)=(AB)C$ ← (قانون التجميع بالنسبة للضرب)

٢- $A(B+C)=AB+AC$ ← (قانون التوزيع من اليسار)

٣- $(B+C)A=BA+CA$ ← (قانون التوزيع من اليمين)

٤- $a(BC)=(aB)C=B()$

٥- $A0=0A=0$ حيث ان 0 هي المصفوفة الصفرية من القياس المناسب .

البرهان:-

١- لتكن $A=(a_{ij})$,$B=(b_{ij})$, $C=(c_{ij})$ بما ان الطرف الايسر يتضمن BCفأن عدد الاعمدة في B يجب ان يكون مساوياً الى عدد صفوف C و لتكن B من القياس $r \times s$ و C من القياس $s \times n$ و بذلك فأن BC من القياس $r \times n$ و بما ان الطرف $s = y_1$ هو A(BC) فأن عدد الاعمدة في A يجب ان يكون r و لنفترض

(ضرب المصفوفات)

ان A من القياس $m \times r$ و بذلك تكون المصفوفة في الطرف الايسر من القياس $m \times n$ و ينتج من ذلك AB من القياس $m \times s$ و ان المصفوفة في الطرف الايمن من القياس $m \times n$ اي ان المصفوفتين في الطرفين من القياس نفسة

- لنفرض ان $AB = E = (e_{ij}), BC = D = (d_{ij})$

$$= \sum_{k=1}^{s} b_{ik}c_{kj}$$

$$e_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots\ldots\ldots + a_{ir}b_{rj} = \sum_{k=1}^{r} a_{ik}b_{kj}$$

و بذلك يكون الطرف الايسر :-

$$A(BC) = AD = \left(\sum_{i=1}^{r} a_{if}d_{fj}\right) = \left(\sum_{l=1}^{r} a_{il} \sum_{k=1}^{s} b_{lk}c_{kj}\right)$$

$$= \left(\sum_{l=s}^{r} \sum_{k=1}^{s} a_{lk}[b_{lk}c_{kj}]\right)$$

و من ناحية اخرى فأن الطرف الايمن:-

$$(AB)C = EC = \left(\sum_{k=1}^{s} e_{ik}c_{kj}\right) = \left(\sum_{k=1}^{s} \sum_{l=1}^{r} [a_{il}b_{lk}]c_{kj}\right)$$

و بما ان العناصر داخل الاقواس هي اعداد حقيقية تخضع لقانون التجميع بالنسبة للضرب فأن المجموعتين تكونان متساويتين .

$$A(BC) = (AB)C$$

- *باقي البراهين واجب .*

ملاحظة:- المصفوفة الصفرية تقوم مقام العدد صفر في الاعداد الحقيقية بالنسبة لعمليتي الجمع و الضرب الا ان هناك بعض القواعد الخاصة بالعدد الصفري في الاعداد الحقيقية لا تنطبق على المصفوفات ففي الاعداد الحقيقية اذا كان كل من a , b اعداد

(ضرب المصفوفات)

حقيقية و كان ab=0 فأن اما a=0 او b=0 على الاقل . و هذه الحالة لا تنطبق بالنسبة للمصفوفة فمثلا :

$$A=\begin{bmatrix}3 & -3\\ -2 & 2\end{bmatrix}\ ,\ B=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

فأن:-

$$AB=\begin{bmatrix}3 & -3\\ -2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=0$$