📖✎الرياضيات- الجبر الخطي – المحـ❸ـاظرة الثالثة✎📖

🕯(خواص المصفوفات و العمليات التي تجري عليها)🕯

تساوي المصفوفات

تتساوى المصفوفتان A,B وتكتب (A=B) اذا كان :

١- كل من A,B من القياس نفسه .

٢- كل عنصر في A يساوي نظيره في الموقع B .

مثال :- المصفوفات الثلاث :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \end{bmatrix}\ B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}\ C = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

فأن A≠B لأن سعة A يختلف عن سعة B.

وعلى الرغم من تساوي سعة المصفوفتين B, C الا ان $c_{12} \neq b_{12}$ وكذلك $b_{22} \neq c_{22}$ لذلك فأن: $B \neq C$

س :- هل ان $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ يساوي $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ولماذا ؟؟

✡✡✡✡✡✡✡✡✡✡

٢-ضرب المصفوفات بأعداد:-

اذا كانت A مصفوفة وكان K عددا حقيقيا فأن حاصل ضرب A في K يكتب KA او AK هو المصفوفة الناتجة من ضرب جميع عناصر A في K ويمكن أن نعرفها كما يأتي:-

اذا كان $A=(a_{ij})$ فأن $KA=AK=(Ka_{ij})$

مثال :- اذا كانت

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

احسب:- -2B,3B ؟

الحل :-

$$-2B = \begin{bmatrix} -10 & -4 & -6 \\ 2 & -8 & 4 \\ -2 & 0 & -6 \end{bmatrix}\ ,\ 3B = \begin{bmatrix} 15 & 6 & 9 \\ -1 & 12 & -6 \\ 3 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

----

٣ -جمع وطرح المصفوفات :-

يمكن جمع المصفوفتين A=(aij) ، B=(bij) اذا كانتا من نفس السعة ويكون ناتج الجمع مصفوفة ويرمز لها بالرمز A+B ونحصل عليها بجمع العناصر المتناظرة في المصفوفتين أي ان:-

A+B=(aij + bij)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b1n \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

ولاتعرف عملية الجمع لمصفوفتين اذا كانتا من سعتين مختلفين.

مثال :-اذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & 6 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

احسب: A + B ؟

الحل :-

$$A + B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & 6 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & 0 & 6 & 2 \\ 2 & 0 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

* ويمكن تعريف عملية طرح المصفوفات بأعتبارها عملية عكسية لعملية الجمع وذلك بأن تقول :أذا كانت A , B مصفوفتين من القياس نفسه فأن A-B هي مصفوفة نحصل عليه بطرح B من العناصر المناظرة في A . ولايمكن طرح مصفوفة من أخرى الا اذا كانت من القياس نفسه .

(خواص المصفوفات و العمليات التي تجري عليها)

مثال:- احسب $A-B$, $B-A$ في المثال السابق ؟

الحل:-

وبشكل عام اذا كانت $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$ مصفوفتين من القياس نفسه فأن:

$A-B=(a_{ij} - b_{ij})$
$A+B=(a_{ij} + b_{ij})$

أي ان العنصر العام في $A+B$ هو $aij + bij$ لأن هذا العنصر عبارة عن مجموع عددين حقيقيين فان خصائص عمليات جمع وطرح المصفوفات وضربها بأعداد حقيقية تشابه عمليات الجمع و الطرح والضرب بالنسبة للأعداد الحقيقية ونلخص ذلك في المبرهنة التالية :-

مبرهنة:-

اذا كانت A , B , C مصفوفات من القياس نفسه وكانت c,b أعداد حقيقية فأن:

١) $A+B = B+A$ ← (قانون الابدال بالنسبة للجمع).
٢) $A+[B+C] = [A+B]+C$ ← (قانون التجميع بالنسبة للجمع).
٣) $A+0 = 0+A = A$ ← (حيث ان ٠ مصفوفة صفرية من القياس نفسه).
٤) $A-A =0$
٥) $c(A+B) = cA + cB$
٦) $(b+c)A = bA +cA$
٧) $b(CA) = (bC)A$

سوف نبرهن (2) بما ان المصفوفات الثلاث من نفس السعة ، فواضح ان مجموع أي مصفوفتين سيكون من السعة نفسها أيضا" ، وبما ان ضرب مصفوفة في عدد لايغير قياسها ، فيمكن اثبات ان المصفوفات في الطرف الأيمن والطرف الأيسر .

برهان (٢) :-

ليكن $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$, $C=(c_{ij})$ فيكون العنصر العام للمصفوفة $B+C$ هو $bij+cij$ وبالتالي فأن العنصر العام للمصفوفة $A+[B+C]$ هو $a_{ij}+[b_{ij} + c_{ij}]$ أي ان :

$A+[B+C] = (a_{ij} +[b_{ij} + c_{ij}])$

وبما ان المجموع داخل القوسين هو مجموع ثلاث أعداد حقيقية التي تحقق قانون التجميع بالنسبة للأعداد الحقيقية فأن :

$a_{ij} + [b_{ij} + c_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}] +c_{ij}$

ومن ناحية أخرى فأن الحد العام للمصفوفة $[A+B]+C$ هو $[a_{ij}+b_{ij}]+c_{ij}$.

اذن :

$$A+[B+C] = [A+B]+C$$

لتساوي عناصرهما المتناظرة .