(أنواع المصفوفات)

١٠ - إذا حققت المصفوفة A العلاقة

$$A^{K+1} = A$$

حيث إن k عدد صحيح موجب ، يقال بان A مصفوفة دوريه Periodic (Matrix) إذا كان K اصغر عدد صحيح موجب يحقق العلاقة

$$A^{K+1} = A$$

يقال بان دورة المصفوفة A هي K وإذا كانت K=1 فان A^2 =A يقال بان A المصفوفة متساوية القوى (Idempotent)

مثال :- لتكن

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$A^{2+1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix} . A$$

$$= \begin{bmatrix} -5 & -6 & -6 \\ 9 & 10 & 9 \\ -4 & -6 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix} = A$$

فان المصفوفة A دورية مقدار دورتها ٢

(انواع المصفوفات)

١١- وتسمى المصفوفة التي تحقق العلاقة

$$A^P = 0$$

حيث P عدد صحيح موجب بالمصفوفة معدومة القوى (Nilpotent) وإذا كان P اصفر عدد صحيح موجب يحقق العلاقة

$$A^P = 0$$

يقال بان A مصفوفة معدومة القوى من الدرجة P .

مثال :- إذا كانت

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$

فأن:

$$B^2 = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

فان المصفوفة B معدومة القوى من الدرجة ٢.

١٢- منقول المصفوفة(Transpose of matrix)

لتكن A مصفوفة من السعة mxn إذا وضعت سطور المصفوفة بشكل أعمدة بالترتيب أي السطر الأول اخذ موضع عمود أول وهكذا فان المصفوفة الجديدة ذات السعة n xm الناتجة عن هذه العمليات تسمى منقول المصفوفة A ويرمز لها ب A^t أي إن العنصر في الموقع (ij) في A^t هو العنصر a j i .

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

(أنواع المصفوفات)

مثال :- إذا كانت

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

مبرهنة :- إذا كانت A , B مصفوفتين فان:

١- $(A^t)^t = A$

٢- $(KA)^t = KA^t$ حيث K عدد حقيقي

٣- $(A+B)^t = A^t + B^t$

٤- $(AB)^t = A^t B^t$

البرهان:- سوف نترك (١) و(٢) كتمرين .

برهان(٣) :-

نفرض ان A= (aij) من القياس mxn وبما ان A+B تكون معرفة أذا وفقط أذا كان B=(bij) من القياس nxm . فان B من القياس mxn الأيمن والأيسر من القياس nxm

ليكن $dij= aij+bij \Longrightarrow A+B=D=(dij)$

فان $(A+B)^t = D^t = (dji) = (aji + bji)$

$.......... \quad .... \quad .. = (aji) + (bji) = A^t + B^t$

(انواع المصفوفات)

برهان(٤) :-

نفرض ان A من القياس mxn و B من القياس pxq فان AB تكون معرفة إذا وفقط إذا كانت n=p ويكون من القياس mxq . أي ان الطرف الأيسر يكون معرفاً إذا وفقط إذا كان n=p وسيكون من القياس qxm والطرف الأيمن $B^t A^t$ ويكون معرفاً إذا وفقط إذا كانت n=p ويكون من المقياس qxm

ليكن AB=C=(cij)

$$(AB)^t = C^t = (C^t_{ij}) = (c_{ji}) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{jk}\, b_{ki}\right)$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} a^t_{kj}\, b^t_{ik}\right)$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} b^t_{ik}\, a^t_{kj}\right)$$

ومن جهة أخرى

$$A^t = (a^t_{ij}) \ , \quad B^t = (b^t_{ij})$$

فان $B^t A^t = \left(\sum_{k=1}^{n} b^t_{ik}\, a^t_{kj}\right) = (AB)^t$

١٣: المصفوفة المتناظرة (Symmetric Matrix) :-

يقال لمصفوفة مربعة $A=(a_{ij})$ بأنها متناظرة إذا كان $A^t = A$ أي إن $a_{ij}=a_{ji}$. وتسمى المصفوفة المربعة بأنها متناظرة عكسيا (Skew_Symmetric) إذا كان $A^t = -A$ أي إن $a_{ij}=-a_{ji}$

(انواع المصفوفات)

مثال :- المصفوفة المربعة $A=\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$ متناظرة

لأنها تساوي منقولها $A^t = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$

والمصفوفة المربعة $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ متناظر عكسيا

لان $B^t = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = -B$

١٤:- المصفوفة المتعامدة :Orthogonal Matrix

يقال لمصفوفة مربعة A بأنها متعامدة إذا تتحقق

$$AA^t = A^t A = I$$

مثال :-

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \sqrt{\frac{3}{2}} \\ 0 & -\sqrt{\frac{3}{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$A A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \sqrt{\frac{3}{2}} \\ 0 & -\sqrt{\frac{3}{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \sqrt{\frac{3}{2}} \\ 0 & -\sqrt{\frac{3}{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = I_{3*3}$$

(انواع المصفوفات)

١٥:- تجزئة المصفوفة (Partition of a matrix)

لتكن A مصفوفة سعة Mxn وBمصفوفة أخرى سعة Nxr لو قسمنا المصفوفتين على النحو التالي

$$A=\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} n1 & n2 \end{array} \\ \begin{array}{c} m1 \\ m2 \end{array} & \begin{pmatrix} A11 & A12 \\ A21 & A22 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} r1 & r2 \end{array} \\ \begin{array}{c} n1 \\ n2 \end{array} & \begin{pmatrix} B11 & B12 \\ B21 & B22 \end{pmatrix} \end{array}$$

حيث إن $m1+m2=m$ $n1+n2=n$ $r1+r2=r$

عند إذ

$$AB=\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} r1 & r2 \end{array} \\ \begin{array}{c} m1 \\ m2 \end{array} & \begin{pmatrix} A11B11+A12B21 & A11B12+A12B22 \\ A21B11+A22B21 & A21B12+A22B22 \end{pmatrix} \end{array}$$

يمكن تجزئة المصفوفة بأي طريقة والى أي عدد من المصفوفات الجزئية بشرط إن تجزئة أعمدة A (المصفوفة التي في عملية AB) هي تجزئة سطور B نفسها عند إذ يمكن إجراء الضرب كما لو كانت المصفوفة الجزئية عناصر .