منظومة المعادلات الخطية المتجانسة

SYSTEM OF HOMOGENEOUS LINEAR EQUATIONS

تعريف:- إن المنظومة الخطية التي لها n من المجاهيل والتي حدودها الخالية من المجاهيل هي اصفارتسمى منظومة خطية متجانسة وتكون صيغتها على النحو التالي :

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \vdots \qquad\quad \ddots \qquad\quad \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

ويمكن إعادة كتابة هذه المعادلات المتجانسة بالصيغة المدرجة على النحو التالي :

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= 0 \\ b_{22}x_2 + \dots + b_{3n}x_n &= 0 \\ \vdots & \\ b_{mm}x_m + \dots + b_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

ملاحظة:-

إذا كان m = n فيكون للمجموعة الحل الصفري فقط .

مثال:- تأمل المنظومة المتجانسة

$$x + 2y - 2z + w = 0$$
$$x - 3y + z - 2w = 0$$
$$x + y - 3z + 5w = 0$$

الحل:- إن لهذه المنظومة حلا غير صفري لوجود أربعة مجاهيل وثلاث معادلات،نحولها الى الصيغة المدرجة فينتج:

$$x + 11w = 0 \rightarrow x = -11w \quad z + 6w = 0 \rightarrow z = -6w$$
$$y + 7w = 0 \rightarrow y = -7w$$

لو فرضنا أن w = t فأن مجموعة الحلول هي:

$$[\,(-11t\,,\,-7t\,,\,-6t) : -\infty < t < \infty\,]$$

✡✡✡✡✡✡✡✡✡✡

تمارين...

(1)...

$$4x - 2y = 5$$
$$-6x + 3y = 1$$

(2)...

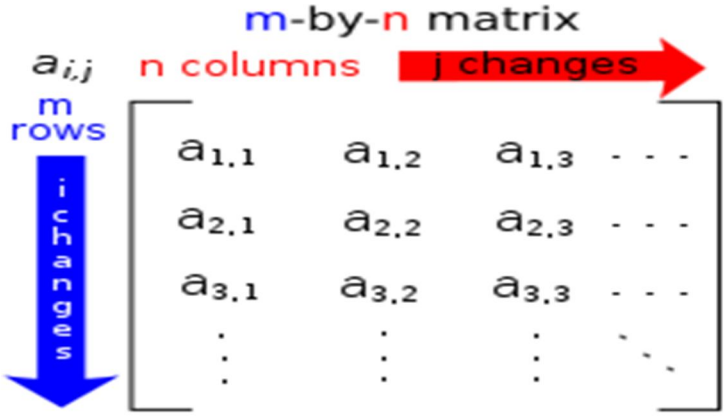
$$2x + y - 3z = 5$$
$$3x - 2y + 2z = 5$$
$$5x - 3y - z = 16$$

المصفوفات والعمليات على مصفوفة

MATRICES AND MATRIX OPERATIONS

عند معالجة منظومة المعادلات الخطية وجدنا إن ما يهمنا هو المعاملات ومواضعها في هذه المنظومة وعند إرجاعها بالصيغة المدرجة من الضروري الحفاظ على ترتيب المجاهيل في المعادلات وعندئذ يمكن ترتيب المعاملات بشكل مستطيلي يسمى مصفوفة(matrix)

تعريف:- يطلق اسم المصفوفة على أي ترتيب مستطيلي الشكل من الإعداد أو الدوال أو إي شئ أخر مكون من صفوف (الخطوط الأفقية) وأعمدة (الخطوط الرأسية) محصورة بين قوسين



وتكتب :-

$$a = (a_{ij}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

حيث يمثل العدد m عدد الصفوف والعدد n عدد الأعمدة وتسمى المصفوفة أيضا بأنها من القياس mxn إذا كانت مكونة من m صفا و n عمودا وتسمى العناصر a في الترتيب عناصر المصفوفة .
ويرمز للمصفوفات بالأحرف اللاتينية الكبيرة وتستخدم الحروف اللاتينية الصغيرة لتمثيل عناصر المصفوفة .

مثال :- تعد المصفوفات التالية

$$\begin{bmatrix} \sin x & e^x \\ 0 & x^{-1} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

*من القياسات 2×2 و 2×3 و 2×1 و 2×2 على التوالي

يحدد تذييل عناصر المصفوفة $A = (a_{ij})$ موقع العنصر في المصفوفة نضراً لأهميتها في الترتيب فيمثل الرقم الأول الصف ويمثل الرقم الثاني العمود الذي يقع فيه ذلك العنصر أي ان a_{ij} هو العنصر في الصف i وفي العمود j .

مثال :- أكتب العناصر a_{21} , a_{33} , a_{42} في المصفوفة

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & 5 & -3 \end{bmatrix}$$

الحل :- نلاحظ أن المصفوفة من القياس 3×4 وأن العنصر a_{21} هو العنصر في الصف الثاني والعمود الأول أي أن

$a_{21} = 6$ وأن $a_{33} = 3$ وان $a_{24} = -2$

(منظومة المعادلات الخطية المتجانسة - المصفوفات)

تعريف:- أذا كان عدد الصفوف في مصفوفة ما مساوياً إلى عدد الاعمده يقال عن تلك المصفوفة أنها مصفوفة مربعه . وتسمى العناصر a_{11} , a_{22} ,....., a_{nn} في المصفوفة المربعة بعناصر القطر الرئيسي للمصفوفة A .

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

تعريف:- تسمى المصفوفة التي جميع عناصرها أصفارا" مصفوفة صفرية ويرمز لها بالرمز 0 .

مثال:- تعد المصفوفات التالية مصفوفات صفرية

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ويمكن التنويه عن قياس المصفوفة الصفرية فاذا كانت من القياس mxn فيرمز لها بالرمز O_{mxn} .

تمارين...

١- اكتب المصفوفة العامة $A = (a_{ij})$ من القياس 4x3 بالتفصيل .

٢- اذا كان

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 0 \\ 4 & x \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 5 & 6 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

a. اكتب العناصر التالية : a_{12} , a_{22} , a_{32} , b_{23} , b_{32} ؟

b. اكتب القطر الرئيسي للمصفوفة B .

c. اكتب القطر الرئيسي للمصفوفة A ، ولماذا ؟؟