المحددات

DETERMINANTS

المحاضرة التاسعة

مثال:- جد محدد المصفوفة من القياس 2×2

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$|A| = (3)(4) - (-2)(1) = 14$$

مثال:- جد محدد المصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 9 & 3 \\ 1 & -4 & 5 \\ 7 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

احسب $|A|$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 9 & 3 \\ 1 & -4 & 5 \\ 7 & -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \\ 7 & 5 \end{matrix}$$

$$|A| = (2)(-4)(5) + (9)(5)(7) + (3)(1)(-3) - (3)(-4)(7) - (2)(5)(-3) - (9)(1)(5) = 335$$

PROPERTIES OF DETERMINANTS خواص المحددات

مبرهنة:- اذا كانت A مصفوفة مربعة فان $|A| = |A^t|$

مثال:- لتكن المصفوفة A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

اثبت ان $|A| = |A^t|$

مبرهنة:- لتكن B مصفوفة ناتجة من المصفوفة المربعة A بالمبادلة بين أي سطرين (عمودين) من A يكون عندئذ $|B| = -|A|$

مبرهنة:- اذا تساوى سطرين (عمودين) في مصفوقة مربعة A .

فان $|A| = 0$

مبرهنة:- اذا كان كل عنصر من سطر (عمود) في مصفوفة مربعة A .

تساوي صفر فان $|A| = 0$

مبرهنة:- لتكن A مصفوفة مربعة فان :-

أ- اذا كانت المصفوفة Bناتجة من ضرب سطر (عمود) واحد في المصفوفة A بعدد ثابت k فان

$$|B| = k|A|$$

ب- اذا كانت المصفوفة Bناتجة من اضافة مضروب احد السطور (الاعمدة) فيA بثابت و اضافته الى سطر (عمود) اخر فان

$$|A| = |B|$$

مثال :-

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & -4 \\ 6 & 1 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 3 & 9 & -12 \\ 6 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & -4 \\ 2 & -11 & -15 \end{bmatrix}$$

ثلاث مصفوفات فان

$$|A| = -71 \, , |B| = -213 \, , |C| = -71$$

فاننا نستنتج ان

$|B| = 3|A|$ وان $|A| = |C|$

لان B ناتجة من ضرب السطر الثاني في A بالعدد 3 و C ناتجة من ضرب السطر الثاني للمصفوفة (4-)A و اضافته الى السطر الثالث

مبرهنة :-لتكن* A *مصفوفة مثلثة سعة* n×n *فان

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} \dots a_{nn}$$

مثال:-استخدم خواص المحددات لتحويل المصفوفة

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ 2 & 6 & 5\\ 3 & 6 & -7\end{bmatrix}$$

الى مصفوفة مثلثة ثم احسب محددها .

الحل:-المصفوفة A يمكن تحولها المصفوفة مثلثية بتطبيق العمليات الاتية

$$=\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ 2 & 6 & 5\\ 3 & 6 & -7\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2\to -2r_1+r_2}\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ 0 & 2 & 11\\ 3 & 6 & -7\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3\to 3r_1+r_3}\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ 0 & 2 & 5\\ 0 & 0 & -7\end{bmatrix}$$

او باستخدام المبرهنة السابقة نحصل على

$$|A|=(1)(2)(-7)=-14$$

تعريف:-لتكن $A=(a_{ij})$ مصفوفة سعة $n\times n$ منقول مصفوفة العوامل المرافقة للعناصر a_{ij} في A و الذي يرمز له بالرمز adj(A) مصاحب A(Adjoint)أي ان

$$adj(A)=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{21} & \cdots A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & \cdots A_{n2}\\ \vdots & & \vdots\\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots A_{nn}\end{bmatrix}$$

مثال :- اوجد المصفوفة المصاحبة للمصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & 6 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

الحل:- نجد العوامل المرافقة للمصفوفة اولا ثم نجد المدور لها

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -18$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 17$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -6$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -6$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -10$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = -10$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -28$$

$$\therefore\ adj(A) = \begin{bmatrix} -18 & -6 & -10 \\ 17 & -10 & -1 \\ -6 & -2 & 28 \end{bmatrix}$$

مبرهنة :- اذا كانت A = (aij) مصفوفة من السعة n ×n فان

$$Aadj(A) = adj(A).A$$
$$= |A|I_n$$

نتيجة:-اذا كانت A مصفوفة من السعة n × n و $|A| \neq 0$ فان:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}.adj(A)$$

مثال :- اوجد $A.adj(A)$ للمصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & 6 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & 6 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -18 & -6 & -10 \\ 17 & -10 & -1 \\ -6 & -2 & 28 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -94 & 0 & 0 \\ 0 & -94 & 0 \\ 0 & 0 & -94 \end{bmatrix} = -94I_3$$