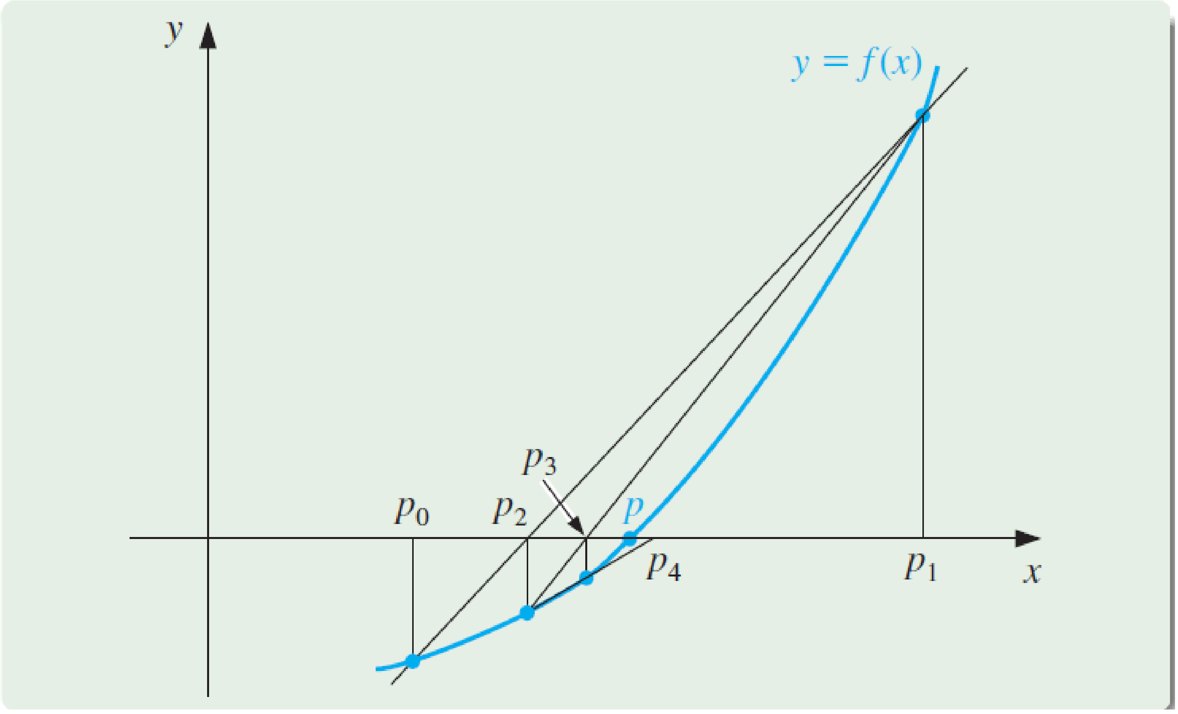
طريقة القاطع SECANT METHOD

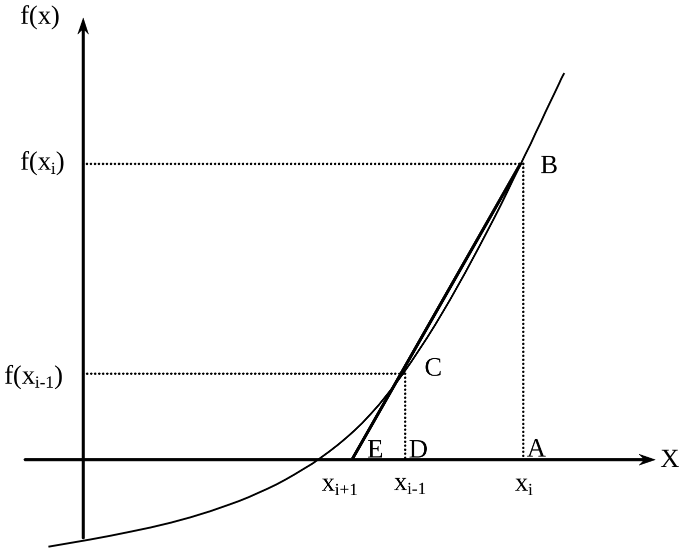


وهذه الطريقة تشبه إلى حد بعيد طريقة الموضع الكاذب المشروحة سابقاً. لتطبيق الطريقة نحتاج إلى تقريبين للجذر وهما x_1 و x_2 ليس من الضروري أن يكونا على جانبي الجذر المضبوط كما في طريقة الموضع الكاذب، وكلا التقريبين يجب أن يكونا قريبين من الحل x^*. من المفضل أن تكون إشارة $y_1=f(x_1)$ و $y_2=f(x_2)$ مختلفتين. نجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين $(x_1, f(x_1))$، $(x_2, f(x_2))$ والذي يسمى بالمستقيم القاطع secant line فتكون القيمة التقريبية الجديدة للجذر x عبارة عن نقطة تقاطع المستقيم مع المحور x. بالتكرار نحصل على المعادلة التالية والتي من خلالها نحصل على التقريب الجديد للجذر:

$$x = x_2 - \frac{y_2(x_2 - x_1)}{y_2 - y_1}$$

$$\mathrm{x} = \frac{\mathrm{x}_1 . \mathrm{y}_2 - \mathrm{x}_2 . \mathrm{y}_1}{\mathrm{y}_2 - \mathrm{y}_1}$$

كذلك يمكن اشتقاق المعادلة أعلاه باستخدام الهندسة وكما يلي:



من تشابه المثلثين ABE و DCE نحصل على:

$$\frac{AB}{AE} = \frac{DC}{DE}$$

والتي يمكن كتابتها بطريقة أخرى:

$$\frac{f(x_i)}{x_i - x_{i+1}} = \frac{f(x_{i-1})}{x_{i-1} - x_{i+1}}$$

وبإعادة تنظيم الحدود التي تحويها هذه المعادلة نحصل على:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_i - x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})}$$

والتي هي نفس المعادلة التي حصلنا عليها سابقاً

$$x = x_2 - \frac{y_2(x_2 - x_1)}{y_2 - y_1}$$

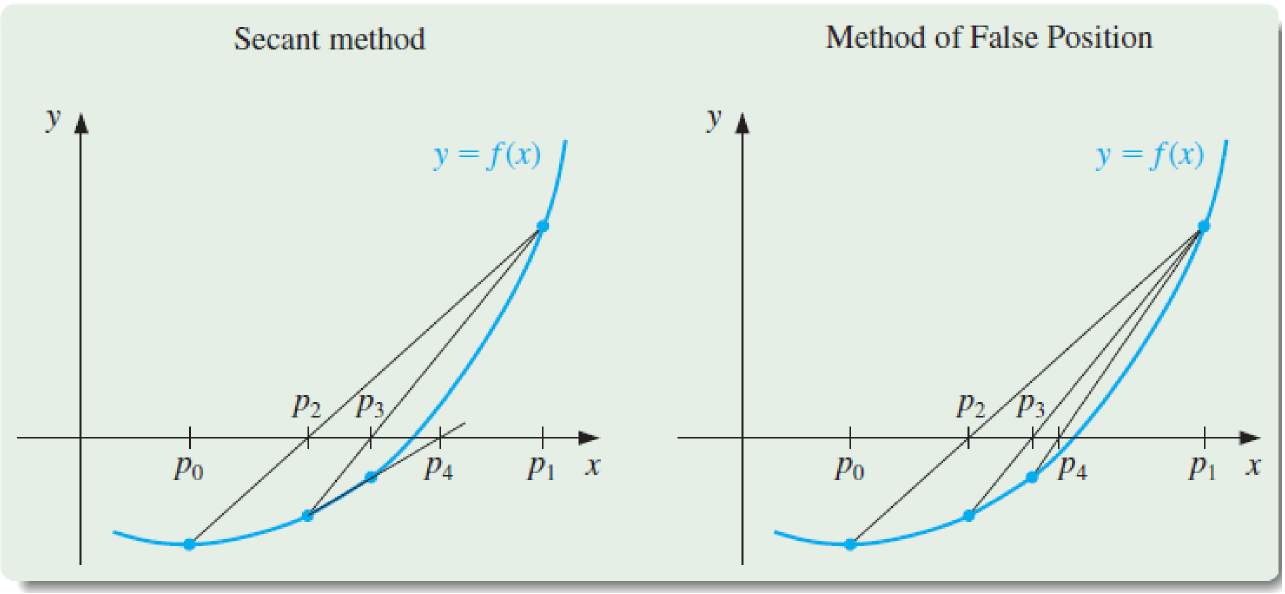
خوارزمية طريقة القاطع:

1. نقوم أولاً بتخمين القيمتين التقريبيتين للجذر x_1 و x_2.
2. نحسب $y_1=f(x_1)$.
3. نحسب $y_2=f(x_2)$.
4. نحسب التقريب الجديد للجذر من القيمتين التخمينيتين الابتدائيتين كالتالي:

$$x = \frac{x_1 . y_2 - x_2 . y_1}{y_2 - y_1}$$

5. إذا كانت $|x_2-x_1|<\varepsilon$، إذاً x هو الجذر، اذهب إلى الخطوة الأخيرة.
6. $y=f(x)$.
7. اطبع قيمة x.
8. $x_1=x_2$، $y_1=y_2$، $x_2=x$، $y_2=y$ اذهب إلى الخطوة رقم 4.
9. توقف.

المقارنة ما بين طريقة الموضع الكاذب وطريقة القاطع



في هذا الرسم التوضيحي، التقريبات الثلاثة الأولى لكلا الطريقتين متشابهة ولكنها تختلف في التقريب الرابع.

فوائد طريقة القاطع:

1. تتقارب هذه الطريقة بسرعة أكبر من طريقة تنصيف الفترات (تقاربها أسرع من المعدل الخطي للسرعة).
2. لا تحتاج هذه الطريقة إلى مشتقة الدالة (كما في بعض الطرق، كطريقة نيوتن) والتي لا تكون متاحة في عدد من التطبيقات.

3. تحتاج إلى احتساب قيمة دالة واحدة في كل تكرار مقارنة مع طريقة نيوتن (سنتعرف عليها لاحقاً) التي تحتاج إلى احتساب قيمة دالتين في كل تكرار.

مساوئ طريقة القاطع

1. في بعض الأحيان لا تتقارب هذه الطريقة إلى الجذر المطلوب.
2. لا توجد حدود للخطأ مضمونة لإيقاف التكرار.
3. تكون هناك صعوبة في التوصل إلى الحل (يكون التقارب بطيء أو قد يكون متباعد) إذا كانت مشتقة الدالة f'(x)=0، أي ميل المستقيم القاطع يكون قريباً من الصفر.

مثال:

أوجد الجذر التقريبي للدالة f(x)=x*ln(x)-1 بطريقة القاطع في الفترة [1, 2] وبخطأ ε=0.001.

$x_1=1$; $x_2=2$; $f(x_1)=-1$; $f(x_2)=0.3863$;

|2-1|=1

$$x=\frac{1*0.3863-2*(-1)}{0.3863-(-1)}=1.7213$$

f(x)=-0.0652

$x_1=x_2=2$; $y_1=y_2=0.3863$; $x_2=x=1.7213$; $y_2=y=-0.0652$;

|1.7213 – 2|=0.2787

$$x=\frac{2*(-0.0652)-1.7213*0.3863}{-0.0652-0.3863}=1.7615$$

f(x)= -0.0027

$x_1=x_2=1.7213$; $y_1=y_2= -0.0652$; $x_2=x= 1.7615$; $y_2=y= -0.0027$;

|1.7615 – 1.7213|=0.0402

$$x=\frac{1.7213*(-0.0027)-1.7615*(-0.0652)}{-0.0027-0.0652}=1.7632$$

f(x)= -3.5784e-5;

$x_1=x_2=1.7615$; $y_1=y_2=-0.0027$; $x_2=x=1.7632$; $y_2=y=-3.5784e-5$;

$|1.7632 - 1.715|=0.0017$;

x= 1.7632 هو الجذر المطلوب

البرنامج الخاص بطريقة القاطع بلغة الـ Matlab

```
clc
f=inline('x*log(x)-1');
x1=input('x1=   ');
x2=input('x2=   ');
n=input('n=   ');
y1=f(x1);
y2=f(x2);
for i=1:n
    x=(x1*y2-x2*y1)/(y2-y1);
    y=f(x);
    x1=x2;
    y1=y2;
    x2=x;
    y2=y;
    disp(x)
    if abs(x2-x1)<=0.001
      break
    end
end
```

النتائج التي تظهر بعد التنفيذ:

1.7213

1.7615

1.7632

1.7632

واجب: قم بحل كل من المعادلات التالية بطريقة القاطع:

1. f(x)=3x – cos(x)-1=0 في الفترة [1, 2] و بخطأ ε=0.001.
2. $f(x) = x^6 - x - 1 = 0$ في الفترة [1, 2] وبخطأ ε=0.001.