$y_1,\ y = \phi(y_1)$

فإذا عرف حل واحد فقط يمكن معرفة الحل الآخر أي يمكن إيجاد الحل العام من حل واحد فقط أي أن الحل العام هو عبارة عن دالة من الحل الأول (الهدف إيجاد الدالة ϕ)

$$(\phi y_1)'' + P(x)(\phi y_1)' + Q(x)(\phi y_1) = 0$$

مشتقة الثانية ما حاصل ضرب دالتين.

$$(\phi y_1' + y_1 \phi')'$$

$$\phi'' y_1 + 2\phi' y_1' + y_1''\phi + P(x)\phi' y_1 + P(x)\phi y_1' + Q(x)\phi y_1 = 0$$

$$\phi[y_1'' + P(x) y_1' + Q(x) y_1] + \phi'' y_1 + 2\phi' y_1' + P(x)\phi' y_1 = 0$$

$$\phi'' y_1 + \phi'[2y_1' + P(x) y_1] = 0 \times \frac{1}{\phi' y_1}$$

$$\frac{\phi''}{\phi'} + 2\frac{y_1'}{y_1} + P(x) = 0$$

$$\phi'' = \frac{d\phi'}{dx},\quad y_1' = \frac{dy_1}{dx}$$

$$\frac{d\phi'}{dx} + 2\frac{dy_1}{y_1} + P(x)\,dx = 0$$

ناتج من ضرب المعادلة الرئيسية × كل المشتقة.

$$\ln\phi' + 2\ln y_1 + \int P(x)\,dx = k$$

$$\ln \phi' y_1^2 = k - \int P(x)\,dx \Longrightarrow \phi' y_1^2 = e^{k-\int P(x)dx}.$$

$$= e^{k} e^{-\int P(x)dx} \qquad (e^k = \text{constant}).$$

$$\phi' y_1^2 = c_2 e^{-\int P(x)dx}$$

$$\phi' = c_2 \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2}$$

$$\phi = c_2 \int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2}\,dx + c_1$$

$$y = \underbrace{c_2 y_1 \int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2}\,dx}_{y_2} + c_1 y_1 \longleftarrow \text{الحل العام}$$

بمقارنة الحل العام $c_1 y_1 + c_2 y_2$

مبدأ الحل $c_1 y_1$ موجود

Ex: find a general solution if $y_1 = x^2$ is a solution of the equation.
$x^2 y'' + x y' - 4y = 0$?

Sol: $P(x) = \frac{1}{x}$ بتقسيم المعادلة على x^2 لتحويلها الى الصيغة العامة

$$\int P(x)\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln x$$

$$e^{-\int P(x)dx} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$$

$$\therefore y = c_2 x^2 \int \frac{1}{x \cdot x^4}\,dx + c_1 x^2$$

$$= c_2 x^2 * \frac{-1}{4x^4} + c_1 x^2 = -c_2 \frac{1}{4x^2} + c_1 x^2$$

$$= \frac{k_2}{x^2} + k_1 x^2 .$$

H.w.: using the given solution, find a general solution of each of the following equ.

1- $y'' + y = 0 \;,\; y_1 = \sin x$

2- $x^2 y'' - (x^2 + 2x) y' + (x+2) y = 0 \;,\; y_1 = x .$

- non homogenous :-

الصيغة العامة

$$y'' + P(x) y' + Q(x) y = R(x)$$

النظرية التالية :- اذا كان (Y) أي حل يحقق المعادلة غير المتجانسة وانا كان ($c_1 y_1 + c_2 y_2$) هو حل المعادلة المتجانسة فان الحل العام للمعادلة الشاملة غير المتجانسة .

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + Y$$

لو وجد حل آخر يحقق المعادلة وليكن حل .

$$y_3'' + P(x) y_3' + Q(x) y_3 = R(x) \quad — (1)$$

$$Y'' + P(x) Y' + Q(x) Y = R(x) \quad — (2)$$

بطرح المعادلة (2) من (1)

$$(y_3 - Y)'' + P(x) (y_3 - Y)' + Q(x) (y_3 - Y) = 0$$

$$\therefore \; y_3 - Y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

$$y_3 = c_1 y_1 + c_2 y_2 + Y$$

* اذا كان Y هو حل للمعادلة الغير المتجانسة و $c_1 y_1 + c_2 y_2$ هو حل للمعادلة المتجانسة فان هنالك حل ثالث y_3 يحقق المعادلة الغير المتجانسة ويجب ان يساوي

$$y_3 = c_1 y_1 + c_2 y_2 + Y$$

حل المعادلة المتجانسة يسمى بالدالة المتممة complementary function.

ويحصل على الحل Y بواسطة التكامل الخاص particular integral.

- Homogenous Linear second order diff. equ with constant coefficients :-

$$a y'' + b y' + c y = 0$$

تعبير

operation of Differentiation (D) :-

$D f(x) = \frac{d f(x)}{dx}$ (D تعبر عن مشتقة ما بعدها) .

$D^2 = \frac{d^2}{dx^2} \;,\; D^3 = \frac{d^3}{dx^3}$

$$(a D^2 + b D + c) y = a y'' + b y' + c y$$