المحاضرة الثالثة

السبت ٢٢ / ١٠ / ٢٠١٦

$(3D^2-10D-8)x^2 = 6-10(2x)-8x^2 = 6-20x-8x^2$

$(3D+2)(D-4)x^2 = (3D+2)(2x-4x^2)$ يمكن تحليلها الى العوامل

$= 6-24x+4x-8x^2 = 6-20x-8x^2$

$(D-4)(3D+2)x^2 = 6-20x-8x^2$

$y = e^{mx}$; $y' = m e^{mx}$, $y'' = m^2 e^{mx}$

$a m^2 e^{mx} + b m e^{mx} + c e^{mx} = 0$

$e^{mx}(am^2+bm+c) = 0$

$am^2+bm+c=0$

characteristic equ.

$y'' = m^2$, $y' = m$, $y = m^0 = 1$

$m_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$\Rightarrow m_1, m_2$

$y_1 = e^{m_1 x}$, $y_2 = e^{m_2 x}$

1- $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}$

2- $m_1 = m_2 \rightarrow y_1 = y_2$

$y = c_1 y_1 + c_2 x y_1$

3- $m_1 = p+qi$

$m_2 = p-qi$

$y_1 = e^{(p+qi)x}$, $y_2 = e^{(p-qi)x}$

$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$

* فلو فرضنا ان الحل عبارة عن (e^{mx}) لان اشتقاقها أكثر من مرة يبقى نفسه ولكي يكون اشتقاقها ممكن جمعه تضرب ب (m) ← e^{mx} لكي يمكن جمعها مع بعضها.

بحل المعادلة وإيجاد قيمة m نجد الحل للمعادلة وتسمى المعادلة بالمعادلة المميزة وهي المعادلة التي يمكن من خلالها إيجاد m والتي تميز الحل وهي تشبه المعادلة المكتوبة بصيغة D .

نحصل على قيمة للحل . ممكن ان نحصل على حالات للحل :.

١) عندما تكون الكمية داخل الجذر موجبة لذلك m_1, m_2 تكون كميات حقيقية .

٢) عندما تكون داخل الجذر = ٥ أي أن $m_1 = m_2$ معناه معرفة حل واحد فقط فاذا كانت الجذور متساوية فان ضرب أحد الحلول ب (X) يعطي الحل الثاني .

٣) عندما تكون الكمية داخل الجذور سالبة لذلك m_1, m_2 تكون كميات أو أعداد مركبة .

Ex:- find the general solution :- $y'' + 7y' + 12y = 0$

sol:- $m^2+7m+12=0 \Rightarrow (m+3)(m+4)=0$

$y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-4x}$

Ex:- $y'' - 6y' + 9y = 0$

$m^2 - 6m + 9 = 0 \Rightarrow (m-3)^2 = 0 \Rightarrow m_1 = 3 = m_2$

$y = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x}$

Ex:- $y'' + 2y' + 5y = 0$

$m^2 + 2m + 5 = 0$

$m_{1,2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \times 5}}{2} = \dfrac{-2 \pm 4i}{2} = -1 \pm 2i$

$y = c_1 e^{(-1+2i)x} + c_2 e^{(-1-2i)x}$

$y = c_1 e^{(p+qi)x} + c_2 e^{(p-qi)x}$

$y = c_1 e^{px} e^{qxi} + c_2 e^{px} e^{-qxi}$

$y = e^{px}[c_1 e^{qxi} + c_2 e^{-qxi}]$

$\left.\begin{aligned} e^{i\theta} &= \cos\theta + i\sin\theta \\ e^{-i\theta} &= \cos\theta - i\sin\theta \end{aligned}\right\}$ قانون أويلر

$y = e^{px}[c_1(\cos qx + i\sin qx) + c_2(\cos qx - i\sin qx)]$

$y = e^{px}[\underbrace{(c_1 + c_2)}_{A}\cos qx + \underbrace{i(c_1 - c_2)}_{B}\sin qx]$

$y = e^{px}[A\cos qx + B\sin qx]$

$\therefore y = e^{-x}[A\cos 2x + B\sin 2x]$.

Ex:- $y'' - 4y = 0$

$m^2 - 4 = 0 \Rightarrow m^2 = 4 \Rightarrow m = \pm 2$, $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$

Ex:- $10y'' + 6y' + y = 0$

$10m^2 + 6m + 1 = 0 \rightarrow m_{1,2} = \dfrac{-6 \pm \sqrt{36 - 4 \times 10}}{2 \times 10} = \dfrac{-6 \pm \sqrt{36 - 40}}{20}$

$= \dfrac{-6}{20} \pm \dfrac{2}{20} i = \dfrac{-3}{10} \pm \dfrac{1}{10} i$

$y = e^{\frac{-3}{10}x}\left[A\cos\dfrac{x}{10} + B\sin\dfrac{x}{10}\right]$.

H.w./2.4/ 3, 11, 15, 19, 23