حلول المعادلات غير الخطية

هناك العديد من المسائل التي تتطلب إيجاد بعض أو جميع جذور معادلة غير خطية. بشكل عام، يمكن كتابة المعادلة التي تحتوي على متغير واحد بالشكل:

$$f(x)= 0;$$

هناك عدد من الطرق العددية لإيجاد قيمة تقريبية لجذر معين للمعادلة السابقة، أي إلى قيمة x^* بحيث تكون $f(x^*)$ قريبة من الصفر. إن جميع الطرق العددية هذه تحتاج إلى قيمة تقريبية أولية لجذر المعادلة المعين لتمكينها من توليد متتابعة من قيم تقريبية أولية لجذر المعادلة المعين لتمكينها من توليد متتابعة من قيم تقريبية أفضل لذلك الجذر.

حساب التقريبات الأولية لجذور معادلة

سنستعرض أسلوبين لتعيين تقريبات أولية لمواضع الجذور الحقيقية للمعادلة $f(x)=0$، حيث f دالة حقيقية مستمرة.

أولاً: تعيين مواقع الجذور بالرسم البياني:

إذا رسمنا مخطط الدالة $y=f(x)$ فإن نقاط تقاطع منحني الدالة مع محور x تمثل جذور المعادلة، فإذا قطع مخطط الدالة المحور في النقاط $x_1, x_2, \ldots , x_n$ فإن كلاً من هذه القيم تمثل جذراً للمعادلة وبالتالي يمكن اعتبار هذه القيم كتقريبات أولية للجذور.

في بعض الأحيان يكون من الملائم كتابة المعادلة بالصيغة:

$$f_1 (x) = f_2 (x)$$

حيث f_1، f_2 دالتين يسهل رسمهما فإذا تقاطع المنحنيان في النقطة (x^*, y^*) فإن x^* تعتبر جذرا للمعادلة.

مثال: عين مواقع جذور المعادلة

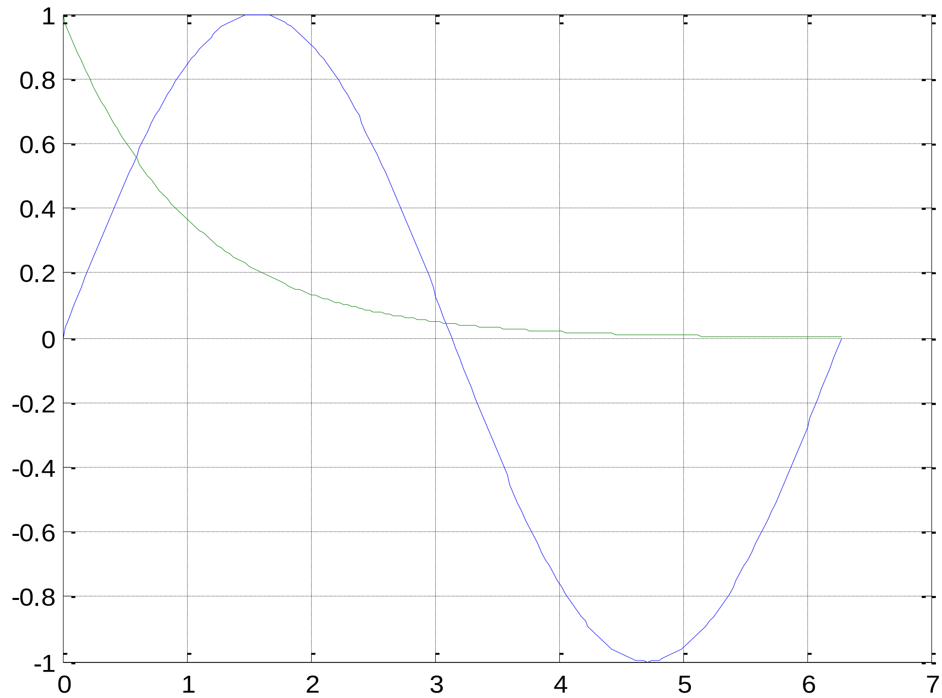
$$e^x \sin(x) - 1 = 0$$

يمكن كتابة المعادلة السابقة بالصيغة المكافئة:

$$\sin(x) = e^{-x}$$

يمكن رسم الدالتين بنظام الماتلاب لتحديد مواقع الجذور وكما يلي:

```
X=0:pi/100:2*pi;      القيم التي يتخذها هذا المتغير من 0 إلى 2π وبخطوة انتقال π/100
Y=sin(x);             توضع الفارزة المنقوطة لكي لا تظهر قيمة الدالة في شاشة النتائج
Z=exp(-x);            يجب أن تكون أسماء الدوال والإيعازات بالحروف الصغيرة
plot(x, y, x, z)      رسم الدالة
grid
shg                   يستخدم لوضع شبكة على الرسم
```



من الشكل الناتج سوف نلاحظ وجود تقاطع بين الدالتين الأول عند x=0.6 والثاني عند x=3.1 ويوجد عدد لا نهائي من التقاطعات الأخرى عندما تكون قريبة من nπ.

ثانياً: تعيين مواقع الجذور بطريقة مبرمجة:

تعتمد هذه الطريقة على ملاحظة تغير الإشارات لقيم لدالة في نقاط متعددة $x_1, x_2, \ldots, x_n$ فإذا كانت قيمة $f(x_i).f(x_{i+1})$ سالبة لبعض قيم i فإن هناك جذراً بين x_i و x_{i+1}.

مثال: عين مواقع جذور المعادلة:

$$f(x) = x^4 - 7x^3 + 3x^2 + 26x - 10 = 0$$

في الفترة [-8, 8].

إذا أخذنا فترة تقسيم h مساوية إلى 4 فإن إشارة الدالة في نقاط التقسيم تكون كما يأتي:

x	-8	-4	0	4	8
f(x)	+	+	-	-	+

نلاحظ وجود جذرين فقط الأول في الفترة (-4, 0) والثاني في الفترة (4, 8).

أما عند اختيار فترة تقسيم أصغر 2 بدلاً من 4 فإن إشارات الدالة تكون كما يأتي:

x	-8	-6	-4	-2	0	2	4	6	8
f(x)	+	+	+	+	-	+	-	+	+

أي إن هناك جذوراً في الفترات (0 ,2-)، (2 ,0) ، (4 ,2) و(6 ,4).

طريقة تنصيف الفترات BISECTION METHOD

لنفرض بأنه يوجد جذر للمعادلة في الفترة $[x_1, x_2]$ أي إن

$$f(x_1).f(x_2)< 0$$

في هذه الطريقة نحسب قيمة الدالة في نقطة تقع في منتصف المسافة بين x_1 و x_2 فإذا كانت إشارتها تختلف عن إشارة $f(x_1)$ فإن الجذر يقع بين x_1 والمنتصف. أما إذا تشابهت الإشارتان فإنها بالتأكيد ستكون مختلفة عن إشارة $f(x_2)$ وعليه يكون الجذر واقعاً بين المنتصف و x_2 ويمكن تكرار هذه العملية عدة مرات للحصول على فترة ضيقة حول الجذر المطلوب.

خوارزمية طريقة التنصيف

لتكن f هي دالة مستمرة في الفترة $[a_0, b_0]$ بحيث أن:

$$f(a_0).f(b_0)< 0$$

لقيم $i=0, 1,2, \dots$ أوجد:

$$r=\frac{a_i+b_i}{2}$$

إذا كان $f(a_0).f(r)=0$ فإن r هو الجذر المطلوب.

إذا كان $f(a_i).f(r)<0$ ضع:

$$a_{i+1}= a_i \ , \ b_{i+1}=r$$

إذا كان $f(a_i).f(r)>0$ ضع:

$$a_{i+1}=r, \ b_{i+1}=b_i$$

بتكرار الطريقة أعلاه نحصل على متتابعة من الفترات $[a_i, b_i]$ التي تحتوي على جذر المعادلة وتكون أطوالها أصغر كلما زادت قيمة i وعلى هذا الأساس إذا كان المطلوب إيجاد قيمة مقربة للجذر لا يتجاوز الخطأ فيها عن ε، نتوقف عندما تتحقق المتراجحة:

$$|b_i-a_i|\le\varepsilon$$

<u>مثال</u>: جد جذر المعادلة $f(x)=x \log x-1=0$ بطريقة التنصيف وبخطأ $\varepsilon=0.001$.

يلاحظ من الدالة أعلاه بأن $f(1).f(3)<0$. وهذا يعني بأن هناك جذراً في الفترة $(1, 3)$.

$f(1)=-1$

$f(3)=0.4314$

$\varepsilon=b_0 - a_0= 3 - 1 = 2$

$$r = \frac{a_0 + b_0}{2} = \frac{1+3}{2} = 2$$

$f(2)=- 0.3979$

$a_1=r; \quad b_1=b_{0;}$

$\varepsilon=b_1 - a_1= 3 - 2 = 1$

$$r = \frac{a_1 + b_1}{2} = \frac{2+3}{2} = 2.5$$

$f(2.5)=- 0.0051$

$a_2=r; \quad b_2=b_{1;}$

$\varepsilon=b_2 - a_2= 3 - 2.5 = 0.5$

$$r = \frac{a_2 + b_2}{2} = \frac{2.5+3}{2} = 2.75$$

$f(2.75)=2.2081$

$a_3=a_2; \quad b_3=r;$

$\varepsilon=b_3 - a_3= 2.75 - 2.5 = 0.25$

$$r = \frac{a_3 + b_3}{2} = \frac{2.5+2.75}{2} = 2.625$$

$f(2.625)=0.1002$

$a_4=a_3; \quad b_4=r;$

$\varepsilon=b_4 - a_4= 2.625 - 2.5 = 0.125$

وهكذا نستمر إلى أن نحصل على الجذر المطلوب أو نصل إلى قيمة خطأ $\varepsilon\leq0.001$.

واجب: عين مواقع الجذور للمعادلات التالية باستخدام طريقة تنصيف الفترات:

1. $f(x)=x^4 - 7x^3 + 3x^2 + 26x -10=0$ في الفترة [-4, 0] وبخطأ $\varepsilon=0.001$.
2. $f(x) = x - \sin(x) - 1 = 0$.

برنامج طريقة تنصيف الفترات بنظام الـ MATLAB:

النتائج التي نحصل عليها من تنفيذ هذا البرنامج:

```
clc
f=inline('x*log(x)-1')
x1=input('x1=');
x2=input('x2=');
n=input('n=');
y1=f(x1);
y2=f(x2);
for i=1:n
    if abs(x2-x1)>0.001
        x=(x1+x2)/2;
        y=f(x);
        disp(x)
        if y1*y<0
            x2=x;
        else
            x1=x;
        end
    else
        break
    end
end
```

1.5000
1.7500
1.8750
1.8125
1.7813
1.7656
1.7578
1.7617
1.7637
1.7627