

## الفصل الأول / المتجهات Vectors

### أولاً: الكميات العددية والاتجاهية

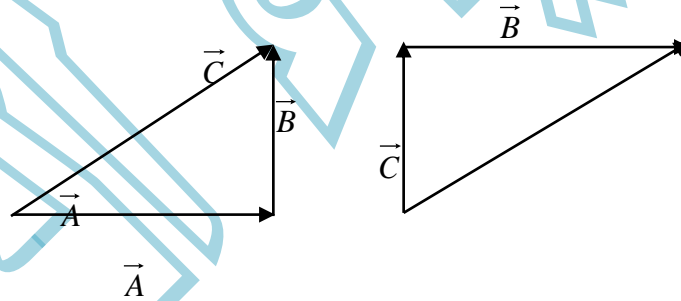
تصنف الكميات الفيزيائية إلى صنفين هما كميات عددية Scalar وكميات اتجاهية Vector. فالكميات التي تعين تعييناً كاملاً بمعرفة مقدارها فقط تسمى بالكميات العددية التي يتحدد مقدارها بذكر عدد تليه وحدة قياس مناسبة ومن الأمثلة الشائعة لهذه الكميات الزمن والكثافة ودرجة الحرارة والشحنة والكتلة.... الخ، وليس هناك صعوبة بالتعامل مع الكميات العددية لأنها تخضع عند الجمع والطرح والضرب والقسمة لجميع القوانين المألوفة في الجبر. أما الكميات الفيزيائية التي يلزم تعيينها بصورة كاملة معرفة كل من مقدارها واتجاهها فهي الكميات الاتجاهية التي لا تخضع لقواعد الجبر البسيطة بل تخضع لجبر المتجهات. ومن أمثلتها القوة والإزاحة والتعجيل وشدة المجال الكهربائي..... الخ. إن كل كمية اتجاهية يمكن أن تمثل بسهم يبين اتجاهه وطوله اتجاه المتجه ومقداره على التوالي، أما كتابةً فيمثل المتجه بحرف فوقه سهم مثل  $\vec{A}$  وفي الطباعة يرمز له بحرف ثقل  $\mathbf{A}$ ، ومقدار المتجه يمثل بحرف دون سهم أو بالقيمة المطلقة للمتجه أي  $|\vec{A}|$ ، وأحياناً يكتب المتجه بحرفي بداية ونهاية السهم.

### ثانياً: جمع المتجهات

لإيجاد مجموع أو محصلة متجهين مثل  $\vec{A}$ ،  $\vec{B}$ ، يرسم المتجه  $\vec{A}$  ومن نهايته يرسم المتجه  $\vec{B}$ . ثم يرسم المتجه  $\vec{C}$ ، الذي يمثل مجموع المتجهين من بداية  $\vec{A}$  إلى نهاية  $\vec{B}$  كما موضح في الشكل (2-1). وتكتب المعادلة الاتجاهية لهذه المحصلة على الشكل الآتي:

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} \quad (1-1)$$

التي تكافئ قانون متوازي أضلاع لجمع المتجهات.



وبالطريقة نفسها يمكن جمع أكثر من متجهين. يخضع الجمع لقانوني التبادل  $(\vec{A} + \vec{B}) = (\vec{B} + \vec{A})$ ، والتجميع  $(\vec{A} + (\vec{B} + \vec{C})) = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C}$ . أما حساب مقدار المحصلة  $C$  واتجاهها فيكون بطريقتين هما طريقة الحساب وطريقة تحليل المتجهات. تم حساب مقدار محصلة متجهين برسم الشكل (3-1) كما يأتي :

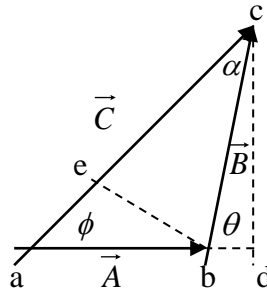
$$(ac)^2 = (ad)^2 + (dc)^2$$

$$\therefore ad = ab + bd = A + B \cos \theta$$

$$dc = B \sin \theta$$

$$\therefore C^2 = (A + B \cos \theta)^2 + (B \sin \theta)^2$$

$$\therefore C = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB \cos \theta} \quad (2-1)$$



الشكل (3-1) : حساب محصلة متجهين.

تمثل المعادلة (2-1) قانون الجيب تمام، حيث  $\theta$  هي الزاوية بين  $\vec{A}$  و  $\vec{B}$ ، ومن خلالها تحسب مقدار المحصلة. أما اتجاهها فيعرف من إيجاد مقدار الزاوية  $\phi$  من المثلث acd :

$$cd = ac \sin \phi$$

ومن المثلث bcd نجد أن:

$$cd = bc \sin \theta$$

$$C \sin \phi = B \sin \theta \Rightarrow \therefore \frac{C}{\sin \theta} = \frac{B}{\sin \phi}$$

كذلك أن:

$$be = A \sin \phi = B \sin \alpha \Rightarrow \therefore \frac{B}{\sin \phi} = \frac{A}{\sin \alpha}$$

لذلك يكون:

$$\frac{C}{\sin \theta} = \frac{B}{\sin \phi} = \frac{A}{\sin \alpha} \dots\dots\dots (3-1)$$

وتعرف هذه المعادلة بمعادلة الجيب.

إن ما يجدر الإشارة إليه أن مقدار محصلة متجهين يمكن أن يكون أكبر أو يساوي أو اصغر من أي منهما، وهذا يتوقف على مقدار الزاوية المحصورة بينهما. وفي الحالة الخاصة التي يكون فيها  $\vec{B}$  عمودياً على  $\vec{A}$ ، أي أن  $\theta = 90^\circ$ ، نحصل على :

$$C = (A^2 + B^2)^{1/2} \quad \text{and} \quad \tan \phi = \frac{B}{A}$$

### ثالثاً: طرح المتجهات

لو عرّفنا متجهاً معيناً بـ  $\vec{A}$  فإن  $-\vec{A}$  هو متجه أيضاً مقداره نفس مقدار  $\vec{A}$  ولكن يعاكسه بالاتجاه. وكما عرّفنا مجموع متجهين فإننا نستطيع أن نعرّف الفرق بين متجهين مثل  $\vec{A}$  و  $\vec{B}$  من خلال المعادلة الآتية :

$$\vec{D} = \vec{A} - \vec{B}$$

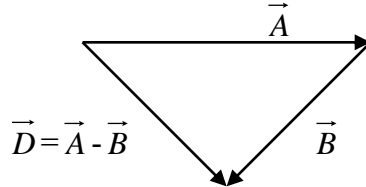
والتي يمكن أن تكتب بالشكل الآتي:

$$\vec{D} = \vec{A} + (-\vec{B})$$

وتعني  $\vec{D}$  محصلة (مجموع) المتجهين  $\vec{A}$  و  $-\vec{B}$  والتي تسمى أيضاً الفرق بين المتجهين  $\vec{A}$  و  $\vec{B}$  (انظر الشكل 4-1).

إذا كان  $\vec{B} = \vec{A}$  فالفرق بينهما يمثل المتجه الصفري Null Vector الذي يعرف بأنه متجه مقداره صفر واتجاهه غير معروف ويرمز له  $\vec{O}$ . ولو طرح المتجهان بالترتيب المعاكس لحصلنا على:

$$-\vec{D} = \vec{B} - \vec{A}$$



الشكل (4-1): الفرق بين متجهين

أما مقدار  $\vec{D}$  فيحسب على النحو الآتي :

$$D^2 = A^2 + B^2 + 2AB\cos(\pi - \theta)$$

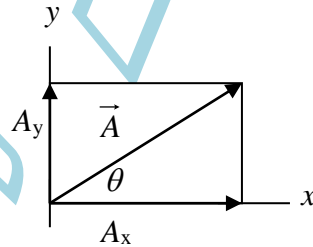
$$\therefore D = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta} \quad \dots\dots\dots(5-1)$$

#### رابعاً: تحليل المتجهات

في تحليل المتجهات يحتاج اتجاهين متعامدين لجمع أو تركيب أي عدد منهما. فمثلاً المتجه  $\vec{A}$  له مركبتان متعامدتان هما  $A_x$  و  $A_y$  كما في الشكل (6-1)، وكما عرفنا في البند السابق، بأن  $\hat{i}$  هي وحدة المتجه باتجاه  $x$  و  $\hat{j}$  هي وحدة المتجه باتجاه  $y$ ، لذلك يمكننا تمثيل المتجه  $\vec{A}$  بما يأتي :

$$\vec{A} = \hat{i}A_x + \hat{j}A_y \quad \dots\dots\dots(7-1)$$

لكن من الشكل تكون:



الشكل (6-1): تحليل متجهين

$$A_x = A\cos\theta, A_y = A\sin\theta \quad \dots\dots\dots(8-1)$$

فبتربيع طرفي المعادلة (8-1) وجمعهما نحصل على مقدار المتجه وهو:

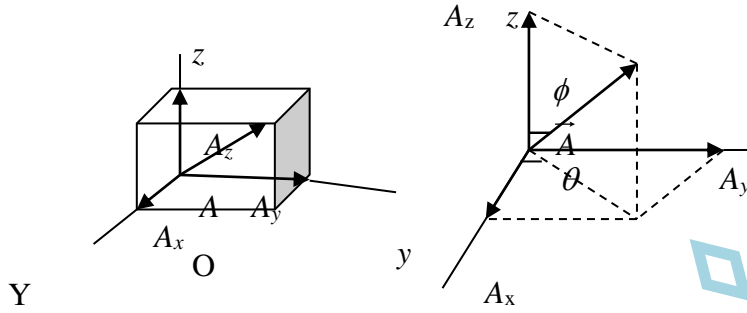
$$A_x = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \quad \dots\dots\dots(9-1)$$

أما اتجاهه فنحصل عليه بقسمة طرفي المعادلة (8-1) على بعضهما وهو:

$$\tan\theta = \frac{A_y}{A_x} \quad \dots\dots\dots(10-1)$$

في الفضاء نحتاج لثلاثة مركبات متعامدة لتحليل المتجهات وهي  $A_x$  و  $A_y$  و  $A_z$  وكما مبين بالشكل (7-1). ومن قاعدة جمع المتجهات نحصل على:

$$\vec{A} = \hat{i}A_x + \hat{j}A_y + \hat{k}A_z \quad \dots\dots\dots(11-1)$$



بالاعتماد على الشكل (8-1) يمكن أن نكتب:

$$\begin{aligned} A_x &= A \sin \theta \cos \phi \\ A_y &= A \sin \theta \sin \phi \end{aligned} \quad (12-1)$$

$$A_z = A \cos \theta$$

وهناك متجه خاص يبدأ من نقطة الأصل 0 إلى نقطة معينة مثل  $(z, y, x)$  يسمى بمتجه الموضع أو بالمتجه نصف القطري Position Vector ويرمز له بـ  $\vec{r}$  ويكتب:

$$\vec{r} = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z \quad (14-1)$$

ومقداره يكون

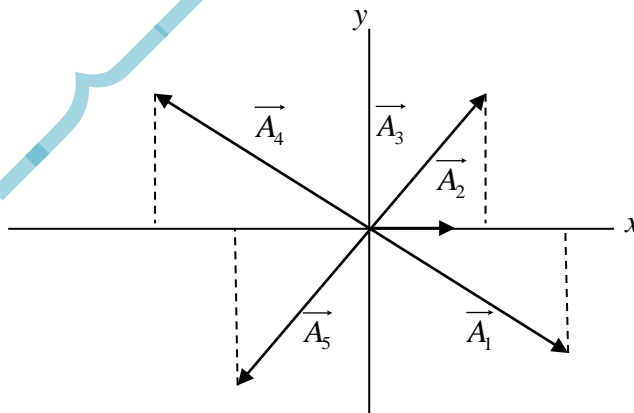
$$|\vec{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (15-1)$$

لجمع أي عدد من المتجهات تقع جميعها في مستوى واحد مثل  $A_1, A_2, A_3, \dots$  بطريقة التحليل، تنقل هذه المتجهات بحيث تقع بداياتها في نقطة الأصل، ثم نحلل كل متجه إلى مركبتين واحدة باتجاه المحور  $x$  والثانية باتجاه المحور  $y$  وكما في الشكل (9-1): فيكون مقدار جمع المركبات باتجاه  $x$  هو:

$$A_x = A_{1x} + A_{2x} + A_{3x} + A_{4x} + A_{5x}$$

وباتجاه  $y$  هو:

$$A_y = A_{1y} + A_{2y} + A_{3y} + A_{4y} + A_{5y}$$



الشكل (9-1): جمع عدد من المتجهات .

أما المحصلة فتكون :

$$\begin{aligned}\vec{A} &= \hat{i} A_x + \hat{j} A_y = \hat{i} \sum_i A_{ix} + \hat{j} \sum_i A_{iy} \\ &= \hat{i} \sum_i A_i \cos \alpha_i + \hat{j} \sum_i A_i \sin \alpha_i\end{aligned}$$

مثال/ إذا كان

$$\vec{C} = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}, \vec{B} = 2\hat{i} + 4\hat{j} - 3\hat{k}, \vec{A} = 3\hat{i} - \hat{j} - 4\hat{k}$$

جد:

$$1 - \text{محصلة المتجهات}, 2 - \text{مقدار محصلة المتجهات}, 3 - |3\vec{A} - 2\vec{B} + 4\vec{C}|$$

الحل:

$$\begin{aligned}1. \vec{D} &= \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = (3-2+1)\hat{i} + (-1+4+2)\hat{j} + (-4-3-1)\hat{k} \\ &= 2\hat{i} + 5\hat{j} - 8\hat{k}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2. |\vec{D}| &= \sqrt{(2)^2 + (5)^2 + (-8)^2} = \sqrt{4 + 25 + 64} \\ &= \sqrt{93} = 9.64\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}3. \vec{M} &= 3\vec{A} - 2\vec{B} + 4\vec{C} = 3(3\hat{i} - \hat{j} - 4\hat{k}) - 2(2\hat{i} + 4\hat{j} - 3\hat{k}) + 4(\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}) \\ &= 17\hat{i} - 3\hat{j} - 10\hat{k}\end{aligned}$$

$$|\vec{M}| = \sqrt{(17)^2 + (-3)^2 + (-10)^2} = \sqrt{398} \cong 20$$