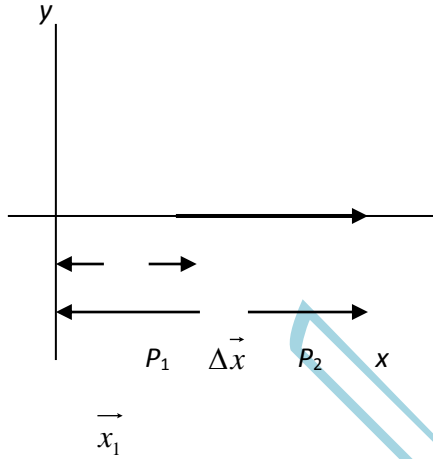


الفصل الثاني الحركة

أولاً : الإزاحة والسرعة والتعجيل

لنأخذ جسماً يتحرك على أي مسار من النقطة P_1 إلى النقطة P_2 كما موضح بالشكل (1-2). إزاحة الجسم المتحرك من P_1 إلى P_2 معرفة بالمتجه $\vec{P_1P_2}$ الذي مقداره $\Delta x = x_2 - x_1$.



وهي كمية متجهة، وتعرف السرعة في أية نقطة على مسار الجسم بأنها المعدل الزمني للإزاحة ويعبر عنها بالعلاقة التفاضلية

$$v = \frac{dx}{dt}$$

حيث أن dx عنصر الإزاحة الذي يقطعه الجسم في الفترة الزمنية الصغيرة dt ويطلق على السرعة في هذه الحالة بالسرعة الآنية، والسرعة كمية متجهة لأنها تنتج من حاصل قسمة كمية متجهة (الإزاحة) على كمية عددية (الزمن). ويسمى مقدار السرعة في هذه الحالة بالانطلاق. ومن التعريف أن وحدات السرعة تقاس (متر / ثا) أو (كم / سا). فإذا بقي مقدار واتجاه السرعة ثابتين سميت السرعة منتظمة إما إذا تغير أحدهما أو كلاهما سميت السرعة غير منتظمة وعندئذ تكون الحركة معجلة ويعرف تعجيلها وفق المعادلة

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{ds}{dt} \right)$$

أو

$$a = \frac{d^2s}{dt^2}$$

فمعدل التعجيل يعرف بالمعادلة الآتية :

$$\vec{a} = \frac{\vec{g}_2 - \vec{g}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{g}}{\Delta t}$$

وهو كمية اتجاهية ووحداته وحدات سرعة على وحدات زمن
أي أن التعجيل هو التغير الزمني للسرعة ويقاس التعجيل بوحدات (متر / ثا²) أو (سم / ثا²)

مثال / يتحرك جسيم على طول المحور x حسب المعادلة $x=3t^2-4t$ ، حيث x مقاسه بالأمتار و t بالثواني، 1- احسب معدل السرعة في الفترة الزمنية من $2sec$ إلى $3sec$ ، 2- احسب السرعة الآنية في نهاية الثانية الرابعة من حركته، 3- متى يكون الجسيم في حالة سكون؟ وعلى أي بعد من ابتداء حركته؟
الحل :

1- لنفرض أن $t_0=2$ وبالتالي يكون:

$$\begin{aligned}x_0 &= 3(2)^2 - 4(2) = 12 - 8 = 4m \\x &= 3(3)^2 - 4(3) = 27 - 12 = 15m \\ \Delta x &= x - x_0 = 15 - 4 = 11m \\ \Delta t &= t - t_0 = 3 - 2 = 1 \text{ sec} \\ \therefore \bar{g} &= \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{11}{1} = 11 \text{ m/s}\end{aligned}$$

-2

$$\vec{g} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = 6t - 4 = 6(4) - 4 = 20 \text{ m/s}$$

3- يكون الجسيم ساكناً عندما تكون $g=0$ ، أي أن:

$$\begin{aligned}6t - 4 &= 0 \rightarrow \therefore t = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} = 0.666 \text{ sec} \\ \therefore x &= 3(0.666)^2 - 4(0.666) = -1.333m\end{aligned}$$

أي أن الإزاحة إلى يسار نقطة الأصل .

مثال / يتحرك جسم على خط مستقيم بتعجيل $a=4-t^2$. جد السرعة والإزاحة كدوال للزمن، إذا علمت بأنه عندما $t=3sec$ فان $v=2m/sec$ و $x=9m$.

$$a=4-t^2 \rightarrow \int_{g_0}^g d g = \int_0^t (4-t^2) dt$$

الحل :

$$g - g_0 = 4t - \frac{1}{3}t^3 \rightarrow 2 - v_0 = 4(3) - \frac{1}{3}(3)^3$$

$$\therefore g_0 = -1$$

$$\therefore g = 4t - \frac{1}{3}t^3 - 1$$

$$\int_{x_0}^x dx = \int_{t_0}^t (4t - \frac{1}{3}t^3 - 1) dt \rightarrow x - x_0 = 2t^2 - \frac{1}{12}t^4 - t$$

$$\therefore 9 - x_0 = 2(3)^2 - \frac{1}{12}(3)^4 - (3) \Rightarrow \therefore x_0 = \frac{3}{4}$$

$$\therefore x = 2t^2 - \frac{1}{12}t^4 - t + \frac{3}{4}$$

ثانيا / الحركة الخطية بتعجيل ثابت

إذا كان التعجيل للجسيم منتظم فمعدل التعجيل يساوي تعجيله الآني، أي أن:

$$a = \frac{g - g_0}{t - t_0}$$

حيث $t_0=0$ وهو زمن ابتداء الجسيم بالحركة متمثلة بالسرعة v_0 والتي تسمى بالسرعة الابتدائية أما g فهي سرعة الجسيم عند الزمن t ، وبذلك يمكن كتابة المعادلة الآتية :

$$g = g_0 + at$$

عندما يتحرك الجسيم بتعجيل ثابت أي عندما تتزايد السرعة بانتظام مع الزمن يكون معدل (متوسط) السرعة مساوياً إلى نصف مجموع السرعتين عند بداية الحركة وعند نهايتها، أي:

$$\bar{g} = \frac{g + g_0}{2}$$

$$x = g_0 t + \frac{1}{2} at^2$$

$$g^2 = g_0^2 + 2ax$$

فالمعادلات المبينة أعلاه هي معادلات الحركة بتعجيل ثابت للحالة الخاصة التي يكون فيها الجسيم عند نقطة الأصل متى ما كانت $t=0$.

يمكن اشتقاق معادلات الحركة أعلاه بطريقة التكامل المحدد على الوجه الآتي :

$$\therefore a = \frac{dg}{dt} \rightarrow \int_{g_0}^g dg = a \int_{t_0=0}^t dt$$

$$g - g_0 = at \rightarrow \therefore g = g_0 + at$$

$$\therefore g = \frac{dx}{dt} \rightarrow dx = g dt = (g_0 + at) dt$$

$$\int_{x_0=0}^x dx = g_0 \int_{t_0=0}^t dt + a \int_{t_0=0}^t t dt$$

$$\therefore x = g_0 t + \frac{1}{2} at^2$$

$$\therefore a = \frac{dg}{dt} = \frac{dg}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dt} \frac{dg}{dx} = g \frac{dg}{dx}$$

$$\int_{g_0}^g g dg = a \int_{x_0=0}^x dx \rightarrow \frac{1}{2} (g^2 - g_0^2) = ax$$

$$\therefore g^2 = g_0^2 + 2ax$$

ثالثاً / الأجسام الساقطة بحرية (السقوط الحر للأجسام)

من أكثر الأمثلة شيوعاً للحركة بتعجيل منتظم هي حركة الأجسام الساقطة سقوطاً حراً نحو سطح الأرض. فبإهمال مقاومة الهواء للأجسام الساقطة والواقعة في منطقة واحدة من سطح الأرض فإنها تسقط نحو الأسفل بتعجيل واحد مهما كانت أشكالها أو كتلتها أو حجومها إن كانت هذه المسافات الساقطة منها هذه الأجسام غير كبيرة، بحيث تؤثر على قيمة التعجيل الأرضي أو تعجيل الجاذبية g ، الذي مقدارها 9.8 m/s^2 تقريباً، وهذه القيمة تتغير تغيراً طفيفاً من موضع إلى آخر على سطح الأرض لان التعجيل الأرضي يعتمد على بعد الجسم من مركز الكرة

الأرضية ويتأثر بدوران الأرض الذي يختلف باختلاف نقاطها. فالمعادلات اللازمة لوصف حركة الأجسام الساقطة سقوطاً حراً هي:

$$g = g_0 + gt$$

$$y = g_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

$$g^2 = g_0^2 + 2gy$$

حيث أبدلنا التعجيل a بالتعجيل الأرضي g والإزاحة x بالإزاحة y في المعادلات أعلاه

مثال / قذفت كرة عمودياً إلى الأعلى من حافة سطح بناية عالية وبالقرب من زاويتها في طريق عودتها أخطأت سطح البناية فمرت بنقطة على بعد $10m$ أسفل نقطة قذفها بسرعة مقدارها $20m/sec$ بعد مرور $4sec$ من قذفها. جد: 1- السرعة الابتدائية التي قذفت بها الكرة، 2- أعظم ارتفاع تصله الكرة، 3- ارتفاع البناية إذا وصلت الكرة إلى نهايتها بعد $5sec$ من قذفها.

الحل:

1- إن سرعة وتعجيل الكرة يكون اتجاههما إلى الأسفل لذلك لابد من وضع الإشارة السالبة، أي:

$$g = g_0 + gt \Rightarrow -20 = g_0 - 9.8 \times 4$$

$$\therefore g_0 = 19.2m/s$$

$$g^2 = g_0^2 + 2gy \Rightarrow 0 = (19.2)^2 - 2 \times 9.8y \quad -2$$

$$\therefore y = 18.8m$$

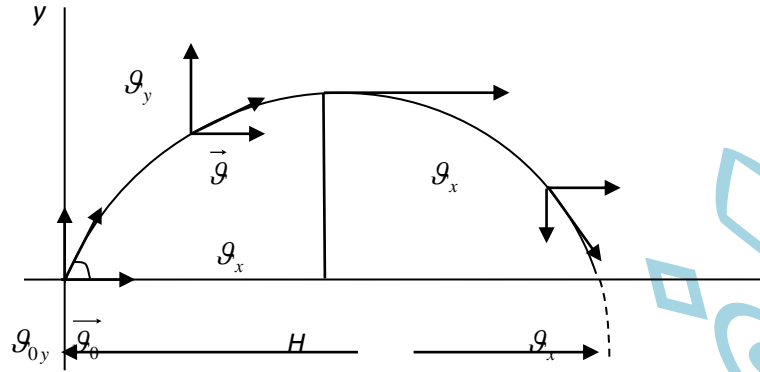
$$y' = g_0 t + \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow y' = 19.2 \times 5 - \frac{1}{2} \times 9.8 \times (5)^2 \quad -3$$

$$\therefore y' = 28.5m$$

وواضح أن الإشارة السالبة تشير إلى أن الارتفاع باتجاه y' - بالنسبة لنقطة القذف.

رابعاً / حركة القذائف :

في هذا البند سوف نناقش حالة عامة وهي السقوط الحر للأجسام في بعدين مثل حركة الكرة في الهواء، قذيفة المدفع، رصاصة المسدس، أو أي حركة لجسم طليق مقذوف في الهواء، وبعد إهمال مقاومة الهواء، يمتلك الجسم الطليق حركتين في الوقت نفسه. فالأولى عمودية وتكون خاضعة للتعجيل الأرضي بسبب قوة جذب الأرض، والثانية أفقية وتكون منتظمة لأنها لا تخضع لأي قوة تسبب لها تعجلاً. والآن سنناقش حركة القذيفة في بعدين هما y, x .



لنفرض أن القذيفة أطلقت من نقطة الأصل للإحداثيات المتعامدة 0 وبالسرع الابتدائية \vec{g}_0 والتي تصنع الزاوية θ مع المحور x الموجب كما بالشكل (5-2). تتحلل السرعة الابتدائية إلى مركبتين إحداها أفقية وهي :

$$g_{0x} = g_0 \cos \theta$$

والأخرى شاقولية وهي:

$$g_{0y} = g_0 \sin \theta$$

وبعد زمن لاحق وليكن t تبقى مركبة السرعة الأفقية ثابتة في أثناء تحليق القذيفة لأنها لا تخضع للتعجيل الأرضي، كما ذكرنا، وتكون:

$$g_x = g_{0x} = g_0 \cos \theta$$

أما المركبة العمودية للسرعة فإنها تخضع للتعجيل الأرضي لذلك فهي تتغير مع الزمن وتكتب كما يأتي:

$$g_y = g_{0y} - gt = g_0 \sin \theta - gt$$

ومن المعادلتين أعلاه نستطيع أن نكتب:

$$\vec{g} = \vec{g}_0 + \vec{gt} \quad \dots\dots\dots (*)$$

ومقدار محصلة سرعة القذيفة في أي لحظة زمنية t هو:

$$|\vec{g}| = g = \sqrt{g_x^2 + g_y^2}$$

واتجاه هذه المحصلة مع الأفق يمكن إيجاده من:

$$\tan \theta = \frac{g_y}{g_x}$$

وبتكامل المعادلة (*) نحصل على متجه موضع القذيفة في أي لحظة من لحظات انطلاقها وهو:

$$\vec{r} = \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

ويكتب بدلالة مركباته بالشكل الآتي :

$$\hat{i}x + \hat{j}y = (\hat{i} g_{0x} + \hat{j} g_{0y}) t - \frac{1}{2} \hat{j} g t^2$$

وبالتالي نستطيع أن نحصل على الإزاحة الأفقية والعمودية للقذيفة في أي لحظة زمنية على وفق ما يأتي :

$$x = g_{0x} t = g_0 t \cos \theta \quad \dots\dots(*)$$

$$y = g_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 = g_0 t \sin \theta - \frac{1}{2} g t^2 \quad \dots\dots(**)$$

وحيث إن الزمن t مشترك للحركتين الأفقية والعمودية لذلك يمكن حله من المعادلتين (*) و (**) للحصول على:

$$y = (\tan \theta)x - \frac{g}{2(g_0 \cos \theta)^2} x^2$$

حيث الكميات g_0 ، $\sin \theta$ ، $\cos \theta$ ، g ، ثابت لذلك يمكن كتابة المعادلة الأخيرة بالشكل:

$$y = Ax - Bx^2$$

وهي معادلة قطع المكافئ الذي يمثل مسار القذيفة حيث:

$$A = \tan \theta , B = \frac{g}{2g_0^2 \cos^2 \theta}$$

للحصول على الزمن اللازم لوصول القذيفة إلى أعلى نقطة لابد من وضع مركبة السرعة العمودية مساوية للصفر، أي أن $g_y = 0$ عندئذ، من المعادلة (2-32) نحصل على:

$$t = \frac{g_0 \sin \theta}{g}$$

ولما كان الزمن الذي تستغرقه القذيفة للوصول إلى أقصى ارتفاع هو نفس الزمن الذي تستغرقه للوصول (للمودة) إلى الأرض، لذلك فالزمن الكلي لتحليق القذيفة في الجو وهو ما يسمى بزمن الطيران Time of Flight يعطى بـ:

$$T = \frac{2g_0 \sin \theta}{g}$$

أما أعلى ارتفاع تصل إليه القذيفة فنحصل عليه من تعويض المعادلة (2-40) بالمعادلة (2-38) وهو:

$$H = \frac{g_0^2 \sin^2 \theta}{2g}$$

ونلاحظ إن أقصى ارتفاع تبلغه القذيفة يتوقف على سرعة الانطلاق g_0 وزاوية القذف θ . أما المسافة الأفقية الكلية 00 التي تقطعها القذيفة في أثناء زمن الطيران فتسمى بالمدى Range ويرمز لها R ونحصل عليها باستعمال المعادلتين (2-37) و (2-41) على ما يأتي:

$$R = g_0 T \cos \theta = g_0 \cos \theta \frac{2g_0 \sin \theta}{g} = \frac{2g_0^2 \sin \theta \cos \theta}{g}$$

لكن

$$2\sin \theta \cos \theta = \sin 2\theta$$

وعليه يكون:

$$R = \frac{g_0^2 \sin 2\theta}{g}$$

ومن المعادلة الأخيرة نلاحظ أن المدى التي تقطعه القذيفة يتوقف على زاوية قذفها ويكون في نهايته العظمى عندما تكون $\theta = 45^\circ$ ، لذلك إذا أراد القاذف أن يصل بالقذيفة إلى ابعـد عمق ممكن في ارض منبسطة عليه أن يجعل سبطانة المدفع مائلة بزاوية 45° عن الأفق.

مثال / أطلقت قذيفة بسرعة $600m/sec$ وبزاوية 60° مع الأفق. احسب :

- 1- المدى الأفقي، 2- أعظم ارتفاع تصله القذيفة، 3- السرعة والارتفاع بعد مرور $30sec$ ، 4- الزمن عندما تكون القذيفة على ارتفاع $10km$.

الحل :

$$R = \frac{g_0^2 \sin \theta}{g} = \frac{(600)^2 (0.866)}{9.8}$$

-1

$$= 31800 m = 31.8 km$$

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g} = \frac{(600)^2 (0.75)}{2(9.8)} \quad -2$$

$$= 13775 \text{ m} = 13.775 \text{ km}$$

$$g_{0x} = g_0 \cos \theta = 600 \times 0.5 = 300 \text{ m/sec} \quad -3$$

$$g_{0y} = g_0 \sin \theta = 600 \times 0.866 = 519.6 \text{ m/sec}$$

$$\therefore g_x = g_{0x} = 300 \text{ m/sec}$$

$$g_y = g_{0y} - gt = 519.6 - (9.8)(30) = 225.6 \text{ m/sec}$$

$$\therefore g = \sqrt{g_x^2 + g_y^2} = \sqrt{(300)^2 + (225.6)^2} = 375.3 \text{ m/sec}$$

أما الارتفاع فهو:

$$y = g_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 = (519.6)(30) - \frac{1}{2} (9.8)(30)^2$$

$$= 11178 \text{ m} = 11.178 \text{ km}$$

$$y = g_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow 10000 = 519.6t - \frac{1}{2} (9.8)t^2 \quad -4$$

$$4.9 t^2 - 519.6 t + 10000 = 0$$

$$(t - 81) (t - 25) = 0$$

أما

$$t - 81 = 0 \rightarrow \therefore t \cong 81 \text{ sec}$$

أو

$$t - 25 = 0 \rightarrow \therefore t \cong 25 \text{ sec}$$

مثال / سقط جسيم كتلته m من ارتفاع H فوق الأرض. اثبت أن الجسيم يصل إلى العارض بزمان مقداره $\sqrt{2H/g}$ ثم جد سرعته. أهمل مقاومة الهواء.

الحل :

$$\therefore y = y_0 t + \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow H = 0 + \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow \frac{2H}{g} = t^2$$

$$\therefore t = \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

$$\therefore v^2 = v_0^2 + 2gH \Rightarrow v^2 = 0 + 2gH \Rightarrow v = \sqrt{2gH}$$