but: $M\,dx + N\,dy = 0$

$\therefore df = M\,dx + N\,dy = 0$

$f = c$

$M(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}$, $df = M\,dx$, $f = \int_a^x M\,dx + c(y)$

$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{d}{dy}\int_a^x M(x,y)\,dx + c(y) = \int_a^x \frac{\partial M}{\partial y}\,dx + c'(y)$

$= \int_a^x \frac{\partial N}{\partial x}\,dx + c'(y)$

$\frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y)\Big]_a^x + c'(y) = N(x,y) - N(a,y) + c'(y).$

But $\frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y)$, $c'(y) = N(a,y)$, $c(y) = \int_b^y N(a,y)\,dy$

$$f = \int_a^x M(x,y)\,dx + \int_b^y N(a,y)\,dy = c$$

* اذا كانت المعادلة التفاضلية تامة فان الحل لها يكون (C).

Ex:- show that the equ. is exact and then solve it.

$(2x + 3y - 2)\,dx + (3x - 4y + 1)\,dy = 0$

sol:- $M(x,y) = 2x + 3y - 2$; $N(x,y) = 3x - 4y + 1$

$\frac{\partial M}{\partial y} = 3 = \frac{\partial N}{\partial x} = 3$ $\therefore$ exact.

$c = \int_a^x M(x,y)\,dx + \int_b^y N(a,y)\,dy$ a, b, c = constant.

$c = \int_a^x (2x + 3y - 2)\,dx + \int_b^y (3a - 4y + 1)\,dy$

$= x^2 + 3yx - 2x\Big)_a^x + 3ay - 2y^2 + y\Big)_b^y$

$= x^2 + 3yx - 2x - a^2 \cancel{- 3ya} + 2a + \cancel{3ay} - 2y^2 + y - 3ab + 2b^2 - b$

$c + a^2 - 2a + 3ab - 2b^2 + b = k = x^2 + 3yx - 2x - 2y^2 + y$

لا يظهر أكثر من ثابت اختياري واحد لان المعادلة التفاضلية من المرتبة الأولى.

- Linear first order diff. equ. المعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة الأولى

الصيغة العامة $\frac{dy}{dx} + P(x)\,y = Q(x)$ $* dx$

لنفرض ان المعادلة غير تامة $(P(x)y - Q(x))\,dx + dy = 0$

عامل التكامل $V(x) = e^{\int \frac{1}{1}(P(x) - Q)\,dx} = e^{\int P(x)\,dx}$; $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) * V(x)$

مشتقة حاصل ضرب دالتين

$V\frac{dy}{dx} + VP(x)y = V\,Q(x) = \frac{d}{dx}(Vy)$

$d(Vy) = V\,Q(x)\,dx$

$Vy = \int V\,Q(x)\,dx + c$

$$y = r^{-1}\left[\int r\,\varphi(x)\,dx + c\right]$$

$$\boxed{y = e^{-\int p(x)dx}\left[\int \varphi(x)\, e^{\int p(x)\,dx}\,dx + c\right]}$$

$p(x)$ = الدالة المصاحبة لـ (y) عندما يكون معامل $\acute{y} = 1$ ، $\varphi(x)$ = الحد المطلق عندما يكون معامل $\acute{y} = 1$

Ex:- $\dfrac{dy}{dx} - y = x$

$p(x) = -1$, $\varphi(x) = x$

$r = e^{\int p(x)dx} = e^{\int -dx} = e^{-x}$

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left[\int \varphi(x)\, e^{\int p(x)\,dx} + c\right]$$

$x \xrightarrow{+} e^{-x}$
$1 \xrightarrow{-} -e^{-x}$
$0 \xrightarrow{+} e^{-x}$
$-xe^{-x} + e^{-x}$

$y = e^{x}\left[\int x e^{-x}\,dx + c\right]$ التكامل بالتجزئة

تكامل(x) $\longrightarrow y = e^{x}\left[-xe^{-x} + \int e^{-x}\,dx + c\right]$

$y = e^{x}\left[-xe^{-x} - e^{-x} + c\right]$

* قد تكون المعادلة في نفس الوقت تامة ومتجانسة وخطية لذلك يمكن حلها بأي طريقة فيجب البحث في شروط المعادلات المذكورة.

H.W. p.21 5, 9, 10

الى صاحب

- **Linear ordinary diff. equ. of second order:-**

الصيغة العامة $y'' + P(x)y' + \varphi(x)y = R(x)$

$R(x) = 0$ homogenous اذا كان الطرف الايمن = صفرا المعادلة متجانسة والا تكون متجانسة
$R(x) \neq 0$ non homogenous السابقة.

اما اذا كانت الثية تختلف عن الصفر فالمعادلة غير متجانسة.

الصيغة العامة للمعادلة المتجانسة. $y'' + P(x)y' + \varphi(x)y = 0$

* النظرية الأولى :- اذا كان y_1 , y_2 حلين للمعادلة التفاضلية المتجانسة فان الحل العام للمعادلة المتجانسة هو أي دمج خطي للحلين.

y_1, y_2

$y = c_1y_1 + c_2y_2$

تحقق صحة النظرية

$$(c_1y_1 + c_2y_2)'' + P(x)(c_1y_1 + c_2y_2)' + \varphi(x)(c_1y_1 + c_2y_2) = 0$$
$$c_1y_1'' + c_2y_2'' + P(x)c_1y_1' + P(x)c_2y_2' + \varphi(x)c_1y_1 + \varphi(x)c_2y_2 = 0$$
$$c_1(y_1'' + P(x)y_1' + \varphi(x)y_1) + c_2(y_2'' + P(x)y_2' + \varphi(x)y_2) = 0$$
$$0 + 0 = 0$$

$y_1, y_2 \longrightarrow c_1y_1 + c_2y_2$ حل يحتوي على ثوابت اختيارية اثنان

فالحل العام هو عبارة عن الدمج الخطي لهذين الحلين y_1 , y_2