رابعاً : المؤثران الرافع و الخافض و مستويات الطاقة

لنفرض أن لدينا دالة موجية هي ψ_n و n هو مستوى طاقتها و أدخلنا عليها المؤثران الرافع و الخافض فإن :

$$a_+\psi_n = \sqrt{n+1}\psi_{n+1} \& a_-\psi_n = \sqrt{n}\psi_{n-1}$$

و لكالأمثلةالأربعة على ذلك :

$$\boxed{1} a_+\psi_0 = \sqrt{1}\psi_1 \ , \boxed{2} a_+\psi_3 = \sqrt{4}\psi_4 \ , \boxed{3} a_-\psi_5 = \sqrt{5}\psi_4 \ , \boxed{\boxed{4} a_-\psi_0 = 0 \quad \text{مهم جداً}}$$

أما إذا أدخلنا المؤثران كلاهما على الدالة الموجية فإن :

$$a_+a_-\psi_n = n\,\psi_n \& a_-a_+\psi_n = (n+1)\psi_n$$

ومن الأمثلة على ذلك :

$$\boxed{1} a_+a_-\psi_0 = 0 \ , \boxed{2} a_-a_+\psi_0 = \psi_0 \ , \boxed{3} a_+a_-\psi_3 = 3\psi_3 \ , \boxed{4} a_-a_+\psi_6 = 7\psi_6 \, .$$

سـؤال ؟أثبت أن طاقة المتذبذب التوافقي في المستوى الصفري E_0 (الطاقة الصفرية أو طاقة الصفر) هي $(\hbar\omega/2)$.

الحـل نأخذ ψ_0 و ندخل عليها مؤثر الطاقة الكلية :

$$\hat{H}\psi_0 = \hbar\omega\left(a_+a_- + \frac{1}{2}\right)\psi_0 = E_0\psi_0$$

$$\Longrightarrow \quad \hbar\omega a_+a_-\psi_0 + \frac{1}{2}\hbar\omega\psi_0 = E_0\psi_0 \boxed{a_+a_-\psi_0 = 0}$$

$$\therefore \ E_0\psi_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega\psi_0 \quad \Longrightarrow \quad E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$$

سؤال ؟ جد قيمة الطاقة الكلية لجسيم يتذبذب توافقياً في المستوى n .

الحـل بنفس الطريقة السابقة و لكن نأخذ ψ_n و ندخل عليها مؤثر الطاقة الكلية :

$$\hat{H}\psi_n = \hbar\omega\left(a_+a_- + \frac{1}{2}\right)\psi_n = E_n\psi_n$$

$$\Longrightarrow \quad \hbar\omega a_+a_-\psi_n + \frac{1}{2}\hbar\omega\psi_n = E_n\psi_n \boxed{a_+a_-\psi_n = n\,\psi_n}$$

$$\therefore\ E_n\psi_n = n\hbar\omega\,\psi_n + \frac{1}{2}\hbar\omega\psi_n \quad \Rightarrow \quad \boxed{E_n = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)}$$ مهم جداً

خامساً : الدالة الموجية للمتذبذب التوافقي في المستوي الصفري ψ_0

نحن نعرف أن :

$$a_-\psi_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}\left(\hbar\frac{d}{dx} + m\omega x\right)\psi_0 = 0$$

$$\hbar\frac{d\psi_0}{dx} + m\omega x\psi_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\psi_0}{dx} = -\frac{m\omega}{\hbar}x\psi_0 \quad \Rightarrow \quad \int\frac{d\psi_0}{\psi_0} = -\frac{m\omega}{\hbar}\int x dx$$

$$\Rightarrow \ln\psi_0 = -\frac{m\omega}{\hbar}\frac{x^2}{2} + c \longleftarrow \boxed{\text{ثابت التكامل}} \quad \Rightarrow \quad \psi_0(x) = e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2+c} = e^c.e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

$$\psi_0(x) = Ae^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}\ \boxed{e^c = A}$$

الآن يجب معايرة الدالة أعلاه لكي نجد قيمة "A" من أستخدام شرط المعايرة :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|\psi_0(x)|^2\,dx = 1 \quad \Rightarrow \quad A^2\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2}\,dx = 1$$

بالمقارنة $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha x^2}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\ \boxed{\alpha = \frac{m\omega}{\hbar}}\ \text{حيث أن}}$

$$\Rightarrow A^2\sqrt{\frac{\pi}{\frac{m\omega}{\hbar}}} = 1 \quad \Rightarrow \quad A^2 = \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} \quad \Rightarrow \quad A = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$\boxed{\therefore\ \psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}}$$

سادساً : المعادلة العامة للدوال الموجية للمتذبذب التوافقي ψ_n

أن عمل المؤثر الرافع a_+ هو رفع مستوى طاقة الجسيم أو النظام المتذبذب توافقياً لذلك يمكن أستخدامه للحصول على الصيغة العامة للدوال الموجية ψ_n وهي كما يلي :

$$\psi_n(x) = A_n(a_+)^n\psi_0(x)$$

و قد وجد أن ثابت المعايرة A_n يساوي $\left(1/\sqrt{n!}\right)$ لذلك تكتب المعادلة العامة بالصورة التالية :

$$\boxed{\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n!}}(a_+)^n\psi_0(x)}$$

و من الأمثلة على ذلك :

$$\boxed{1}\ \psi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{1!}}(a_+)^1\psi_0(x) = a_+\psi_0(x) \quad , \quad \boxed{2}\ \psi_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2!}}(a_+)^2\psi_0(x)$$

$$\boxed{3}\ \psi_3(x) = \frac{1}{\sqrt{3!}}(a_+)^3\psi_0(x) \quad , \quad \boxed{4}\ \psi_4(x) = \frac{1}{\sqrt{4!}}(a_+)^4\psi_0(x)$$

سابعاً : كتابة المؤثرات بدلالة المؤثران الرافع و الخافض

الكمية	المؤثر	المؤثر بدلالة a_+ و a_-
الموقع	$\hat{x} = x$	$\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a_+ + a_-)$
الزخم	$\hat{p} = -i\hbar\frac{d}{dx}$	$i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}(a_+ - a_-)$
مربع الموقع	$\hat{x}^2 = x^2$	$\frac{\hbar}{2m\omega}(a_+^2 + a_+a_- + a_-a_+ + a_-^2)$
مربع الزخم	$\hat{p}^2 = -\hbar^2\frac{d^2}{dx^2}$	$-\frac{m\omega\hbar}{2}(a_+^2 - a_+a_- - a_-a_+ + a_-^2)$
السرعة	$\hat{v} = \frac{\hat{p}}{m} = -i\frac{\hbar}{m}\frac{d}{dx}$	$i\sqrt{\frac{\omega\hbar}{2m}}(a_+ - a_-)$
الطاقة الكامنة	$\hat{V} = \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$	$\frac{\omega\hbar}{4}(a_+^2 + a_+a_- + a_-a_+ + a_-^2)$
الطاقة الحركية	$\frac{1}{2m}\hat{p}^2 = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}$	$-\frac{\omega\hbar}{4}(a_+^2 - a_+a_- - a_-a_+ + a_-^2)$
الطاقة الكلية	$\hat{E}$	$\omega\hbar\left(a_+a_- + \frac{1}{2}\right)$

$\mathcal{H.W}$ 1 Prove that $[a_+, a_-] = -1 \quad \&[a_-, a_+] = 1$

$$[a_+, a_-]\psi_n = a_+a_-\psi_n - a_-a_+\psi_n = n\psi_n - (n+1)\psi_n = n\psi_n - n\psi_n - \psi_n$$

$$\therefore [a_+, a_-]\psi_n = -\psi_n \quad \Longrightarrow \quad [a_+, a_-] = -1$$

$$[a_-, a_+]\psi_n = a_-a_+\psi_n - a_+a_-\psi_n = (n+1)\psi_n - n\psi_n = n\psi_n + \psi_n - n\psi_n$$

$$\therefore [a_-, a_+]\psi_n = \psi_n \quad \Longrightarrow \quad [a_-, a_+] = 1$$

و نتيجة لهذا الحل نجد أن :

$$[a_+, a_-] = a_+a_- - a_-a_+ = -1 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{a_+a_- = a_-a_+ - 1} \& \boxed{a_-a_+ = a_+a_- + 1}$$

$\mathcal{H.W}$ 2 Prove that

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a_+ + a_-) \& \hat{p} = i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}(a_+ - a_-)$$

$\mathcal{Sol}$:

$$\boxed{for\ \hat{x}} \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a_+ + a_-) = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left[\frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}(-i\hat{p} + m\omega x) + \frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}(i\hat{p} + m\omega x)\right]$$

$$= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}(2m\omega x) = \frac{2m\omega}{2m\omega}x = x$$

$$\boxed{for\ \hat{p}} \quad i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}(a_+ - a_-)$$

$$= i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}(-i\hat{p} + m\omega x) - \frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}(i\hat{p} + m\omega x)\right]$$

$$= i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}\frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}(-i2\hat{p}) = \frac{i}{2}(-i2\hat{p}) = \hat{p}\boxed{i * -i = 1}$$

ثامناً : بعض خواص المؤثران الرافع و الخافض

❖ المؤثر الرافع a_+ هو المرافق العقدي للمؤثر الخافض a_-و بالعكس كما يلي :

$$(a_-)^* = a_+ \& (a_+)^* = a_-$$

❖ يمكن لهذه المؤثرات أن تؤثر على الدوال التي تأتي قبلها لاحظ المثال :

$$\int f^*(a_+g)dx = \int a_+f^*gdx = \int (a_-)^*f^*gdx = \int (a_-f)^*gdx$$

ومثال على ذلك :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^* a_-a_+\psi_n dx = \int_{-\infty}^{+\infty} a_-\psi_n^* a_+\psi_n dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (a_+\psi_n)^* a_+\psi_n \, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (\sqrt{n+1}\psi_n)^* \sqrt{n+1}\psi_n \, dx = (n+1)\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^* \psi_n dx = n+1$$